

Realisierung von 2-D-Digitalfiltern
mit kreissymmetrischem Tiefpassverhalten
durch Kaskadierung von 2-D-Wellendigitalfiltern

DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DES GRADES EINES
DOKTOR – INGENIEURS
DER
ABTEILUNG FÜR ELEKTROTECHNIK
AN DER RUHR – UNIVERSITÄT BOCHUM

von
Paul A. Lennarz

Düsseldorf

Bochum 1983

Realisierung von 2-D-Digitalfiltern
mit kreissymmetrischem Tiefpassverhalten
durch Kaskadierung von 2-D-Wellendigitalfiltern

DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DES GRADES EINES
DOKTOR – INGENIEURS
DER
ABTEILUNG FÜR ELEKTROTECHNIK
AN DER RUHR – UNIVERSITÄT BOCHUM

von
Paul A. Lennarz

Düsseldorf

Bochum 1983



Dissertation eingereicht am: 23.11.82

Tag der mündlichen Prüfung: 21. 1.83

Referent: Prof. Dr. sc. techn. A. Fettweis

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. J. F. Böhme

Inhaltsverzeichnis

Seite

1.	Einleitung	5
2.	Grundlagen mehrdimensionaler Wellendigitalfilter	
2.1	Eindimensionale Wellendigitalfilter	7
2.2	Mehrdimensionale Digitalfilter	15
2.3	Zweidimensionale Wellendigitalfilter	21
2.4	Beispiel für ein 2-D-WDF	
2.4.1	Die Gleichungen des 2-D-Wellendigitalfilters	23
2.4.2	Realisierung des 2-D-WDF als BASIC-Programm	27
2.4.3	Direkte Realisierung der Übertragungsfunktion	29
3.	Stabilität in 2-D-Wellendigitalfiltern	
3.1	Unterdrückung von parasitären Schwingungen in 2-D-Wellendigitalfiltern	32
3.2	Beispiel für die Anwendung der Maßnahmen zur Unterdrückung von parasitären Schwingungen	35
3.3	Bibostabilität in 2-D-Wellendigitalfiltern	39
4.	Zweidimensionale Wellendigitalfilter mit kreisförmigen Übertragungsverhalten	41
4.1	Erläuterung des Toleranzschemas und des angewandten Verfahrens	42
4.2	Die verwendeten Transformationen und ihre Realisierung im WDF	
4.2.1	Eindimensionale Filter für zweidimensionale Signale (Separable Filter)	47
4.2.2	Teilfilter mit symmetrischem Verhalten bezüglich ω_1 und ω_2	49
4.2.3	Andere einfach zu realisierende Filter	55
4.3	Vieleckfilter aus idealen Einzelfiltern	59
4.3.1	Viereckfilter	63
4.3.2	Sechseckfilter	64

4.3.3	Achteckfilter	67
4.3.4	Zwölfeckfilter	70
4.3.5	16-Eck-Filter	74
4.4	Zusammenstellung der wichtigsten Filter	76
4.5	Benutzung der Ergebnisse für nicht ideale Einzelfilter	79
4.6	Filter aus Teilfiltern mit beliebigen Drehwinkeln	82
5.	Ergänzungen zu dem in 4. besprochenen Verfahren	
5.1	Phasenkompensierte Filter (Null-Phasen-Filter)	87
5.2	Verbesserung des Verfahrens durch Verwendung von parallelen Filtern	88
5.3	Hochpassfilter	90
6.	Darstellung der Implementation auf dem Minicomputer	
6.1	Das Realisierte 2-D-Wellendigitalfilter	94
6.2	Die Programmierung auf dem Minicomputer	98
6.3	Unterdrückung von parasitären Schwingungen	101
6.4	Praktische Ergebnisse	106
7.	Zusammenfassung	111
	Literaturverzeichnis	115

Einleitung

In der Theorie der linearen zweidimensionalen Signalverarbeitung sind zwei Arten von Filtern von besonderem Interesse. Die eine Art hat im idealen Fall in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene eine fächerförmige Übertragungsfunktion, die andere Art eine kreisförmige Übertragungsfunktion.

Diese kreissymmetrischen Übertragungsfunktionen dienen zur Verarbeitung von Bildsignalen, bei der keine Richtung bevorzugt werden soll. Dabei werden in der Literatur [1-6] fast immer Tiefpässe betrachtet. Diese sollen in Bildverarbeitungssystemen zum Beschneiden der höheren Frequenzanteile benutzt werden. Eine Anwendung von 2-dimensionalen Filtern, die der bei Multiplexsystemen entspräche, wird nicht in Betracht gezogen.

Das bekannteste System, bei dem Bildverarbeitung eingesetzt wird, dürfte das Fernsehen sein. Dabei wird von einem Bild ausgegangen, an das sowohl in Bezug auf die Grautonabstufung als auch in Bezug auf die Anzahl der Bildpunkte, mit denen sich das Bild reproduzieren läßt, sehr geringe Anforderungen gestellt werden. Zur Auflösung des Bildes genügen ca. 250 000 Bildpunkte mit einer Grautondarstellung von 8 Bit. Wendet man sich der Verarbeitung von feststehenden Bildern zu, so ergeben sich wesentlich höhere Anforderungen an diese Werte. Ein gewöhnlicher Fotoapparat (Kleinbild) hat eine Auflösung von über zehn Millionen Bildpunkten, die mit 16 Bit Grautonabstufung dargestellt werden müssen. Kameras für grafische Aufgaben haben noch eine in der Größenordnung von 10000-fach höhere Anzahl von Bildpunkten. Beim Fotoapparat werden Unterschiede der Beleuchtung durch verschiedenartige Belichtung des Fotomaterials ausgeglichen. Daher sind zur Darstellung aller möglichen Helligkeitswerte noch eine größere Anzahl von Bit (z. B. 16 zusätzliche Bit) notwendig. Bildvorlagen können aber nicht nur aufgrund der Darstellung des sichtbaren Strahlenbereichs, sondern auch mit anderen Wellenlängen erfolgen. Auch hier können sich sehr hohe Intensitätsunterschiede ergeben, wenn z.B. mit Hilfe von Röntgenstrahlung sowohl die weichen als auch die harten Körperteile erfaßt werden sollen.

Die Verarbeitung solcher hochaufgelöster Signale erfolgt über Universalrechner oder spezielle Rechenanlagen die als Bildverarbeitungssysteme (Picture Processing Systems) bezeichnet werden. Spezielle Hardwaregeräte zur digitalen Bildverarbeitung sind bisher nur aus der Fernstechnik und in der medizinischen Technik bekannt. Solche Geräte sollen in dieser Arbeit aber nicht berücksichtigt werden. Soweit in den einzelnen Kapitel überhaupt auf die Ausführung der Verarbeitungsalgorithmen eingegangen wird, so wird nur die Verarbeitung mit einem Rechner betrachtet.

Die Untersuchungen sollen im Hinblick auf die Verwendung von zweidimensionalen Wellendigitalfiltern zur Bildverarbeitung geführt werden. Der Bezug zu zweidimensionalen Filtern in herkömmlicher Struktur soll kurz in Abschnitt 2 angesprochen werden, der sich mit den Grundlagen der (mehrdimensionalen) Wellendigitalfilter befaßt und in dem ein einfaches Beispiel für die Programmierung eines 2-D-Wellendigitalfilters gegeben wird. Die Ergebnisse aus Abschnitt 4, der sich mit der Approximation des kreissymmetrischen Übertragungsverhaltens durch Vielecke befaßt, lassen sich aber auch für herkömmliche Digitalfilterrealisierungen verwenden.

Der Abschnitt 3 befaßt sich mit der Stabilität der 2-dimensionalen Wellendigitalfilter. Bekanntlich lassen sich Wellendigitalfilter sowohl in Bezug auf die granularen Schwingungen, als auch in Bezug auf die Überlaufschwingungen stabil gestalten. Dies läßt sich auf den mehrdimensionalen Fall erweitern, wo sich für herkömmliche Digitalfilter keine generelle Stabilität beweisen läßt. Im letzten Abschnitt, der sich mit einer wirkungsvollen Realisierung von 2-dimensionalen Wellendigitalfiltern befaßt, werden für die Notwendigkeit und Nützlichkeit der Stabilitätsmaßnahmen Beispiele gegeben.

2. Grundlagen mehrdimensionaler Wellendigitalfilter

2.1 Eindimensionale Wellendigitalfilter

Wellendigitalfilter (abgekürzt WDF) sind Digitalfilter, daher zeitdiskrete Systeme, deren Signale digital dargestellt werden. Die Wellendigitalfilter sind aus der Theorie der analogen LC-Filter hergeleitet worden. In dieser Arbeit sollen nur WDF betrachtet werden, die aus analogen LC-Filtern hergeleitet sind, die mit einer widerstandsbehafteten Quelle und einem Abschlußwiderstand beschaltet sind (Beispiel in Bild 2.3). Die Grundlagen dazu sind in [7] und [9] gegeben. Zu den Wellendigitalfiltern gibt es eine große Anzahl weiterer Arbeiten, von denen nur wenige zitiert sind [8, 10-15]. Die Arbeit [16] gibt eine zusammenfassende Übersicht der WDF und beinhaltet die wichtigsten Grundlagen und Formeln für WDF.

In der Theorie der Wellendigitalfilter wird das analoge Filter, von dem die Ableitung zum WDF erfolgt, als Referenzfilter bezeichnet. Die komplexe Frequenzvariable in diesem Referenzfilter wird als ψ bezeichnet. Dieses ψ gewinnt eine Bedeutung, wenn es mit der üblichen komplexen Frequenzvariablen p und mit der Betriebsperiode T durch folgende Beziehung verbunden wird:

$$\psi = \tanh \frac{p \cdot T}{2} = \frac{z-1}{z+1} \quad (2.1.1)$$

dabei ist

$$z = e^{pT} \quad (2.1.2)$$

die aus der z -Transformation bekannte Größe. Durch die Betriebsperiode T wird die Rate $1/T$, mit der das Eingangssignal sich ändern kann und mit der daher das Filter arbeiten muß bezeichnet. Die Größe

$$f_A = 1/T \quad (2.1.3)$$

wird unabhängig davon, ob das Signal durch Abtastung mit dieser Rate entstanden ist oder nicht, als Abtastfrequenz bezeichnet. Die komplexe Frequenz sei folgendermaßen in Realteil und Imaginärteil aufgespalten:

$$p = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi \cdot f \quad , \quad (2.1.4)$$

wobei f die physikalische Frequenz und ω die physikalische Kreisfrequenz bezeichnet; dabei wird ω häufig auch als Frequenz bezeichnet. In ganz analoger Weise sei in dieser Arbeit die komplexe Frequenz ψ aufgespalten:

$$\psi = \chi + j\phi \quad , \quad (2.1.5)$$

so daß sich für $\sigma=0$ folgender Zusammenhang zwischen der physikalischen Frequenz und der entsprechenden Frequenz im Referenzfilter ergibt:

$$\phi = \tan \frac{\omega T}{2} \quad . \quad (2.1.6)$$

Durch diese Gleichung werden jeweils Abschnitte der Länge $1/T$ auf der physikalischen Frequenzachse auf die gesamte ϕ -Achse abgebildet. Da das Spektrum sich auf der ω -Achse im Abstand $1/T$ wiederholt, genügt die Betrachtung eines einzigen Abschnitts. Dazu kann die normierte Frequenz

$$\Omega = \frac{\omega \cdot T}{\pi} \quad (2.1.7)$$

eingeführt werden, die in dem Grundabschnitt von -1 bis $+1$ läuft.

Bei der Umwandlung des Referenzfilters in ein WDF werden die Wellengrößen an allen Toren des Referenzfilters nachgebildet. Diese stehen mit den Spannungen und Strömen in

folgendem Zusammenhang:

$$a = u + R_v \cdot i \quad (2.1.8)$$

$$b = u - R_v \cdot i$$

, wobei i der Strom und u die Spannung an dem Tor sind, dem der Torwiderstand R_v zugeordnet ist. Die Größe a wird als einlaufende Welle, die Größe b als reflektierte Welle bezeichnet. Die Impedanz der Kapazitäten im Referenzfilter wird durch die Größe

$$\frac{R_v}{\psi} \quad (2.1.9)$$

definiert, wobei der Torwiderstand R_v beträgt. Im Wellendigitalfilter wird aus dieser Kapazität ein Verzögerer (Bild 2.1). Dies ist ein Bauelement, das die Eingangsgröße

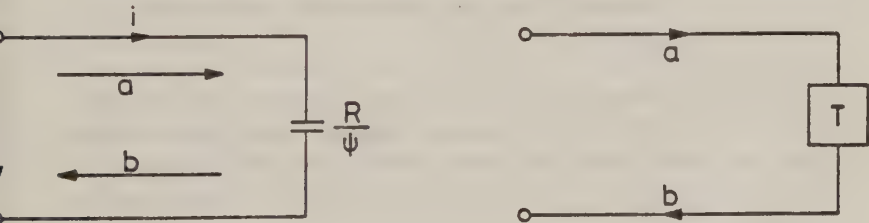


Bild 2.1 Eine Kapazität im Referenzfilter (links) und der dazugehörige Verzögerer im Signalflußbild des WDF (rechts)

um eine Betriebsperiode T verzögert an den Ausgang gibt. Da das WDF zeitdiskret arbeitet, ändert sich das Eingangs- und Ausgangssignal des Verzögerers nur einmal pro Betriebsperiode. Bei der Realisierung einer Induktivität des Referenzfilters entsteht auch ein Verzögerer, der aber

zusätzlich die Eingangsgröße in ihrem Vorzeichen ändert, so daß im Signalflußdiagramm vor oder hinter dem Verzögerer noch ein Inverter liegt (Bild 2.2). Die Impedanz ergibt sich aus

$$R_v \cdot \psi \quad (2.1.10)$$

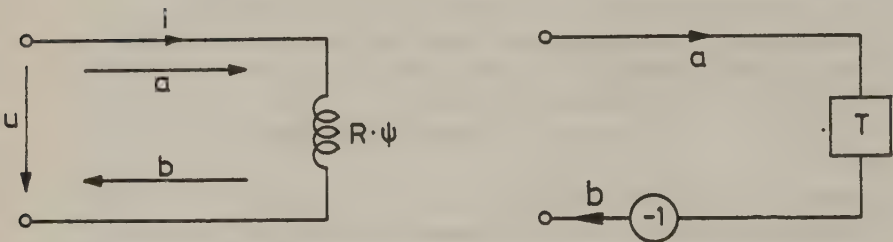


Bild 2.2 Eine Induktivität im Referenzfilter (links) und der dazugehörige Verzögerer im Signalflußbild des WDF (rechts)

Ist im Referenzfilter die Quelle widerstandsbehaftet und das Referenzfilter mit einem Widerstand abgeschlossen, was beides weiter oben vorausgesetzt wurde, so sind zur Realisierung als Wellendigitalfilter dazu keine Bauelemente notwendig. Es gilt dann:

$$a_E = e \quad , \quad (2.1.11)$$

wobei a_E die einlaufende Welle in das Eingangstor des Filters und e die Urspannung der Quelle ist. Dem Tor muß dabei der Torwiderstand in Größe des Quellwiderstandes zugeordnet werden.

Für die Ausgangsgröße gilt:

$$b_A = 2u \quad , \quad (2.1.12)$$

wobei b_A die auslaufende Welle am Ausgang des Filters ist und der Torwiderstand gleich dem Abschlußwiderstand sein muß.

Das Verbindungsnetzwerk des Referenzfilters wird im Wellendigitalfilter zu einem Adaptor mit $n+2$ Toren, wenn n die Anzahl der Bauelemente (ohne Abschlußwiderstand und Quelle mit Innenwiderstand mitzurechnen) angibt. Ist das Referenzfilter ein Reaktanzfilter, so ist n gleich der Anzahl der Reaktanzen. Ist das Reaktanzfilter zusätzlich kanonisch in der Anzahl der Bauelemente, so gibt n den Grad der Übertragungsfunktion an. Da für jede Reaktanz ein Verzögerer notwendig ist, gibt n auch die Anzahl der Verzögerer im WDF an. Den einzelnen Toren sind die Torwiderstände zugeordnet, deren Werte denen der Bauelemente entsprechen. Die größenmäßige Realisierung der Bauelemente wird in diesem Adaptor mit $n+2$ Toren vorgenommen, indem die Koeffizienten der darin enthaltenen Multiplizierer entsprechend gewählt werden. Der Gesamtadaptor mit $n+2$ Toren läßt sich bei Abzweigfiltern immer durch 3-Tor-Paralleladaptoren und 3-Tor-Serienadaptoren aufbauen, indem das Referenzfilter in 3-Tor-Verbindungen aufgeteilt wird [10]. Das Beispiel aus Bild 2.3 ist [16] entnommen. Für diese 3-Tor-Adaptern gelten folgende Gleichungen:
Serienadaptor:

$$b_1 = a_1 - \alpha(a_1 + a_2 + a_3) \quad (2.1.13)$$

$$b_2 = a_2 + (\alpha - 1)(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$b_3 = -a_1 - a_2$$

mit

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.1.14)$$

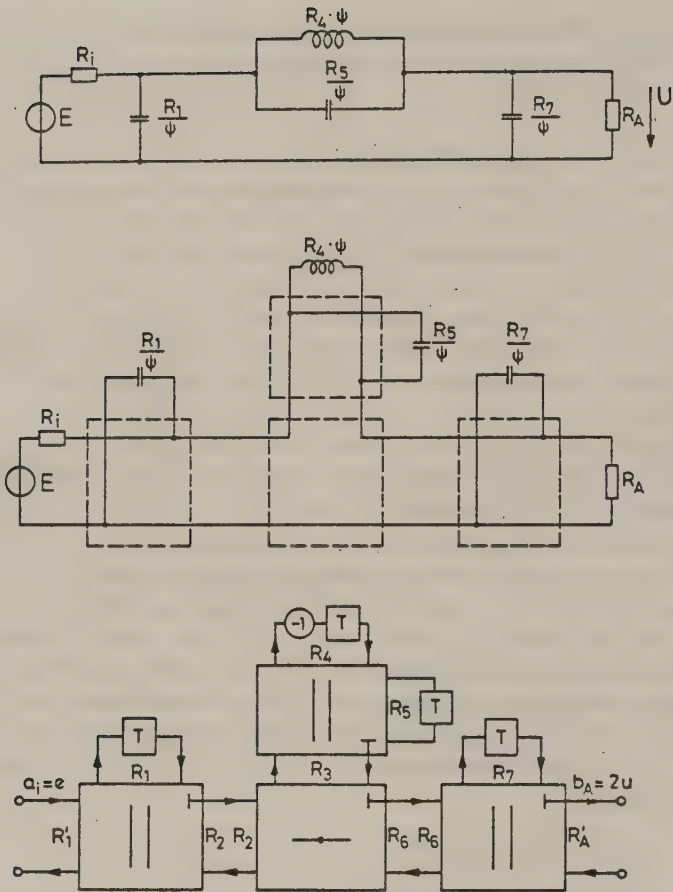


Bild 2.3 Ein Referenzfilter in Abzweigstruktur (oben), die Aufteilung in Dreitorverbindungen (Mitte) und die Realisierung als Wellendigitalfilter mit Hilfe von Dreitoradaptoren (unten)

Paralleladaptor:

$$b_1 = a_3 + (\beta - 1)(a_1 - a_2) \quad (2.1.15)$$

$$b_2 = a_3 + \beta (a_1 - a_2)$$

$$b_3 = a_2 + \beta (a_1 - a_2)$$

mit

$$\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad (2.1.16)$$

wobei die Größen α und β als Koeffizienten bezeichnet

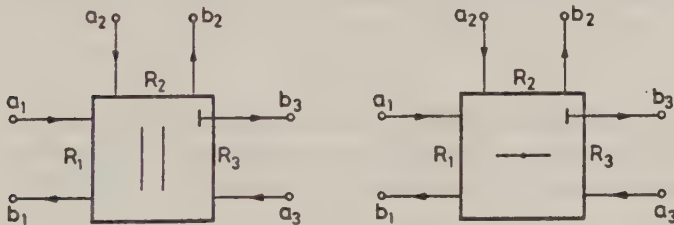


Bild 2.4 Symbolische Darstellung des Dreitorserien-
adaptors (rechts) und des Dreitorparalleladaptors

werden. Die symbolische Darstellung für diese Adaptoren ist in Bild 2.4 gegeben. Bei der Ableitung dieser Beziehungen sind 2 Voraussetzungen gemacht worden:

1.) Der Torwiderstand R_3 beträgt im Serienadaptor:

$$R_3 = R_1 + R_2 \quad (2.1.17)$$

und im Paralleladaptor:

$$R_3 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \quad (2.1.18)$$

2.) Werden zwei Adaptoren miteinander verbunden, so muß diese Verbindung bei einem der Adaptoren über das reflexionsfreie Tor erfolgen. Das reflexionsfreie Tor ist das Tor mit dem Index 3, wenn man sich auf (2.1.13) und (2.1.15) bezieht. Die reflexionsfreien Tore sind in Bild 2.4 innerhalb der Adaptoren durch eine Markierung der auslaufenden Welle gekennzeichnet.

Durch Einhaltung dieser Bedingungen ist der Torwiderstand am Ausgangstor nicht mehr frei wählbar; es ergibt sich vielmehr ein Wert R_A' . Ist im Referenzfilter der Abschlußwiderstand R_A ungleich diesem Wert

$$R_A \neq R_A' \quad , \quad (2.1.19)$$

so läßt sich das Filter durch Anfügen eines Zweitoradaptors (unter Einhaltung der Bedingungen von 2.) realisieren. Die Gleichungen dieses Adaptors lauten:

$$b_{A'} = a_A + \gamma(a_A - a_{A'}) \quad (2.1.20)$$

$$b_A = a_{A'} + \gamma(a_A - a_{A'})$$

mit

$$\gamma = \frac{R_{A'} - R_A}{R_{A'} + R_A} \quad (2.1.21)$$

Mit dieser Erweiterung lassen sich dann mit den angegebenen Gleichungen für die 3-Tor-Adaptoren alle Referenzfilter in Abzweigstruktur für beliebige Werte der Bauelemente, wobei diese aber passiv sein müssen, realisieren. Aus den so

erhaltenen Gleichungen können Gleichungen für eine Realisierung auf einem Rechner abgeleitet werden. Bei einer Hardwarerealisierung sollten diese Gleichungen nicht als Grundlage verwendet werden, da durch die spezielle Wahl der Lage der reflexionsfreien Tore unnötig lange Signallaufzeiten verursacht werden [12].

Die Theorie der Wellendigitalfilter ist so umfangreich, daß in dieser Arbeit auf eine weitergehende Übersicht verzichtet wurde. Der angegebene Satz von Gleichungen reicht aber aus, um WDF in Abzweigstruktur aufzubauen. Andererseits dient er als Bezug für spätere Kapitel in dieser Arbeit. Die Vorteile der Wellendigitalfilter zeigen sich aber in besonderem Maße, wenn von den verschiedenen Möglichkeiten und Eigenschaften bei der Realisierung eines WDF Gebrauch gemacht wird. Ganz exemplarisch sei dazu auf die 3 Arbeiten [13,14,15] verwiesen.

2.2 Mehrdimensionale Digitalfilter

Das Eingangssignal eines Digitalfilters ist eine Folge von Werten. Diese Werte sind gewöhnlich über die Betriebsperiode einzelnen Zeitpunkten zugeordnet. Für die Folge der Ausgangswerte eines Digitalfilters hat diese zeitliche Zuordnung aber keine Bedeutung. Die Ausgangsfolge ist vielmehr unabhängig von der Größe der Betriebsperiode. Daher läßt sich ein Digitalfilter auch ohne den zeitlichen Bezug als ein System auffassen, das aus einer Eingangsfolge

$$x(1), x(2), \dots, x(N), x(N+1), \dots \quad (2.2.1)$$

eine Ausgangsfolge

$$y(1), y(2), \dots, y(N), y(N+1), \dots \quad (2.2.2)$$

berechnet. In diese Darstellung können auch weiterhin die Bedingungen, damit ein System ein Filter darstellt, wie zum Beispiel die Kausalität und Linearität, einbezogen werden.

Eine andere Darstellung dieser Folgen ist:

$$x(n) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2.3)$$

$$y(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

Die Erweiterung zu dem mehrdimensionalen(hier L-dimensionalen) Fall geschieht in folgender Weise:

$$x(\underline{n}) \quad \underline{n} \in \mathbb{N}^L \quad (2.2.4)$$

$$y(\underline{n}) \quad \underline{n} \in \mathbb{N}^L \quad (2.2.5)$$

Daher sind nicht die Größen selbst mehrdimensional, sondern ihre Abhängigkeit von den natürlichen Zahlen.

Im Digitalfilter bleiben alle Signalwege gleicher Art, wie die im eindimensionalen Fall. Die Verzögerer werden in folgender Art verallgemeinert:

eindimensionaler Fall:

$$b(n) = a(n-1) \quad (2.2.6)$$

mehrdimensionaler Fall:

$$1: \quad b(n_1, n_2, \dots, n_L) = a(n_1-1, \dots, n_L) \quad (2.2.7)$$

$$2: \quad b(n_1, n_2, \dots, n_L) = a(n_1, n_2-1, \dots, n_L)$$

.

.

.

$$L-1: \quad b(n_1, n_2, \dots, n_L) = a(n_1, n_2, \dots, n_{L-1}-1, n_L)$$

$$L: \quad b(n_1, \dots, n_L) = a(n_1, n_2, \dots, n_{L-1}, n_L-1)$$

In dieser Arbeit wird nur der zweidimensionale Fall betrachtet. Die Signale haben dann folgende Form:

$$x(m,n) \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \quad (2.2.8)$$

$$y(m,n) \quad n \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N} \quad (2.2.9)$$

und es wird zwischen zwei Arten von Verzögerern unterschieden:

$$1: b(m,n) = a(m-1,n) \quad (2.2.10)$$

$$2: b(m,n) = a(m,n-1)$$

Für diese Verzögerer werden dann wieder entsprechende Symbole eingeführt (Bild 2.5). Die möglichen Werte von m und

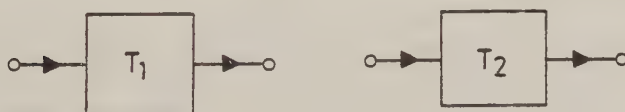


Bild 2.5 Verzögerer bezüglich des Index 1 (links)
und Verzögerer bezüglich des Index 2 (rechts)

n sind durch :

$$m \in \mathbb{N}$$

$$(2.2.11)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

gegeben. Sie lassen sich durch einzelne Punkte in einer Ebene darstellen. Das Eingangssignal muß dann für jeden Punkt dieses Rasters definiert sein. Ein physikalisches Beispiel für ein solches Signal ist ein gerastertes Bild. In

diesem Bild ist jedem Punkt ein Schwärzungsgrad zugeordnet. Dabei ist durch (2.2.11) die Form des Rasters nicht festgelegt. In der Bildverarbeitung sind die bekanntesten Raster das rechteckige Raster und das Offsetraster. Zur Angabe der Form des Rasters muß noch die Zuordnung der Rasterpunkte zu den einzelnen Werten von n und m erfolgen. In dieser Arbeit wird ausschließlich ein rechteckiges Raster verwendet, indem ein Eckpunkt mit $m=1$ und $n=1$ indiziert ist. Benutzt man nun diesen Punkt als Ursprung für ein rechteckiges Koordinatensystem, so sollen die m in Richtung der einen Achse, die n in Richtung der anderen Achse zunehmen. Damit ist das Raster eindeutig m und n zugeordnet.

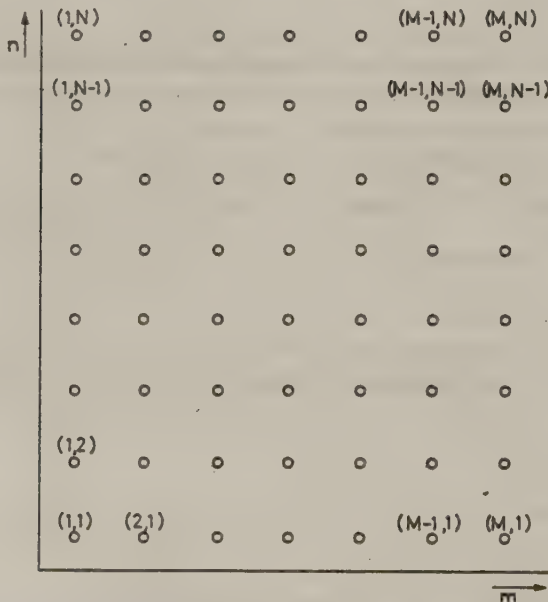


Bild 2.6 Rechteckiges Abtast.- und Verarbeitungsschema für ein zweidimensionales Feld mit Indizierung

Diese Art des Rasters mit der Wahl der Zuordnung erlaubt unter Einhaltung der Bedingungen des 2-D-Abtasttheorems eine eindeutige Zuordnung einer Bildvorlage zu einem Feld und umgekehrt die Rekonstruktion dieses Bildes aus den Größen des Feldes (Dieses ist natürlich auch für andere Raster möglich).

Innerhalb des Feldes lassen sich noch die Größen Zeile und Spalte definieren. Die Signale

$$\begin{aligned} x(m,n) \quad m &= \text{const} \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

seien als Spalte bezeichnet, wobei sich die verschiedenen Spalten durch verschiedenes m unterscheiden. Die Signale des Feldes

$$\begin{aligned} x(m,n) \quad m &= 1, 2, 3, \dots \\ n &= \text{const} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

seien als Zeile bezeichnet, wobei die verschiedenen Zeilen durch verschiedenes n indiziert werden. Unter spaltenweiser Verarbeitung eines Eingangsfeldes soll nun verstanden werden, daß zuerst die Signalwerte einer Spaltenacheinander als Eingangsgröße betrachtet und im Digitalfilter verarbeitet werden, bevor die Signale der nächsten Spalte zur Verarbeitung gelangen. Ist das Feld in der Größe m unbeschränkt, so gibt es nur eine Richtung der spaltenweisen Verarbeitung:

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2.14)$$

, ist dagegen das Feld in der Größe m beschränkt, d.h.

$$m \leq M \quad (2.2.15)$$

, so gibt es zwei Möglichkeiten der spaltenweisen

Verarbeitung:

$$m = 1, 2, 3, \dots, M \quad (2.2.16)$$

$$m = M, M-1, \dots, 3, 2, 1 \quad (2.2.17)$$

Bei der Reihenfolge (2.2.17) wird von einer gegenüber der Reihenfolge (2.2.16) umgekehrten Iterationsrichtung (oder auch Verarbeitungsrichtung) gesprochen. Bei dieser Umkehrung der Verarbeitungsrichtung ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$H^{\rightarrow}(j\omega_1, j\omega_2) = H(-j\omega_1, j\omega_2) \quad (2.2.18)$$

,wenn

$$H(j\omega_1, j\omega_2) \quad (2.2.19)$$

die Übertragungsfunktion der Reihenfolge (2.2.16) war. Bei der Definition der spaltenweisen Verarbeitung ist keine Aussage über die Richtung der Verarbeitung innerhalb dieser Spalte gemacht worden. Dies kann wieder in zwei Arten erfolgen:

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (2.2.20)$$

$$n = N, N-1, \dots, 1 \quad (2.2.21)$$

wobei die spaltenweise Verarbeitung voraussetzt, daß n begrenzt ist. Ist die Übertragungsfunktion für die Reihenfolge (2.2.20) bekannt und mit

$$H(j\omega_1, j\omega_2) \quad (2.2.22)$$

bezeichnet, so ergibt sich die Übertragungsfunktion für die

umgekehrte Iterationsrichtung als

$$H^{+-}(j\omega_1, j\omega_2) = H(j\omega_1, -j\omega_2) \quad (2.2.23)$$

Unter der zeilenweisen Verarbeitung soll verstanden werden, wenn die Abarbeitung der Eingangssignale zuerst innerhalb einer Zeile geschieht, bevor zur nächsten Zeile übergegangen wird. Die Zusammenhänge zwischen den Übertragungsfunktionen der verschiedenen Reihenfolgen bleiben die gleichen. Bei der zeilenweisen Abarbeitung darf n unbegrenzt sein, während für m gelten muß $m \leq M$.

2.3 Zweidimensionale Wellendigitalfilter

Mehrdimensionale Wellendigitalfilter werden aus mehrdimensionalen Reaktanzfiltern hergeleitet [17,18,19]. Hier sei nur der zweidimensionale Fall betrachtet, indem es im Referenzfilter die beiden Frequenzvariablen ψ_1 und ψ_2 gibt. Entsprechend gibt es zwei Arten von Reaktanzen; die einen bezüglich der Frequenzvariablen ψ_1 und die anderen bezüglich der Frequenzvariablen ψ_2 . Im zweidimensionalen WDF ergeben sich daraus die Verzögerer bezüglich des Index 1 und die Verzögerer bezüglich des Index 2. Der Zusammenhang zu den zweidimensionalen z -Variablen z_1 und z_2 ist durch

$$\psi_1 = \frac{z_1^{-1}}{z_1 + 1} \quad ; \quad \psi_2 = \frac{z_2^{-1}}{z_2 + 1} \quad (2.3.1)$$

gegeben. Dabei sind z_1 und z_2 mit den physikalischen Frequenzen ω_1 und ω_2 durch die Beziehungen

$$z_1 = e^{p_1 \cdot T_1} \quad ; \quad z_2 = e^{p_2 \cdot T_2} \quad (2.3.2)$$

verbunden. Damit ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen den Frequenzvariablen im Referenzfilter und den

physikalischen Frequenzen:

$$\phi_1 = \tan \frac{\omega_1 \cdot T_1}{2} \quad , \quad \phi_2 = \tan \frac{\omega_2 \cdot T_2}{2} \quad (2.3.3)$$

Für die im Abschnitt 3 behandelten Aproximationen sind die normierten Frequenzen

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 \cdot T_1}{\pi} \quad , \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2 \cdot T_2}{\pi} \quad (2.3.4)$$

von besonderer Bedeutung. Der sich wiederholende Abschnitt auf der Frequenzachse wird im zweidimensionalen Fall zu einem sich wiederholenden Bereich in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene. Der Grundbereich wird als Nyquistbereich bezeichnet. Innerhalb dieses Grundbereiches laufen die normierten Frequenzvariablen Ω_1 und Ω_2 jeweils von -1 bis +1 .

Die Theorie über die Apaktoren der Wellendigitalfilter unterscheidet sich im mehrdimensionalen Fall nicht von der für den eindimensionalen Fall gemachten Theorie. Die Ergebnisse aus [10] und [11] lassen sich verwenden. Die im Abschnitt 2.1 gemachte Aufteilung der Adaptoren in Dreitoradaptoren ist weiterhin möglich.

Bei der Approximation von zweidimensionalen WDF läßt sich die für eindimensionale Reaktanzfilter vorhandene Theorie nicht auf den zweidimensionalen Fall erweitern. Bekannt ist bisher das Verfahren zur Approximation von Fächerfiltern [20,21,22]. Bei den in Abschnitt 3 gemachten Vorschlägen zur Approximation des kreisförmigen Übertragungsverhaltens, wird die eigentliche Approximation des Frequenzverhaltens auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt und somit ein Rückgriff auf vorhandene Methoden [z.B. 23,24] erlaubt.

2.4 Beispiel eines einfachen 2-D-Wellendigitalfilters

2.4.1 Die Gleichungen des 2-D-Wellendigitalfilters

In Bild 2.7 ist ein zweidimensionales Referenzfilter der einfachsten Form gegeben. Daher gibt es in diesem Referenzfilter zwei reaktive Elemente in den Frequenzvariablen ψ_1 und ψ_2 . Eine weitere Vereinfachung des Filters würde wieder auf ein eindimensionales Filter führen. Der $n+2$ -Tor-Adaptor (Bild 2.8) ist in diesem Fall ein 4-Tor-Adaptor. Die Übertragungsfunktion des Filters ist durch

$$H(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \psi_1 + \psi_2} \quad (2.4.1)$$

gegeben. Diese Übertragungsfunktion ist -bis auf den Faktor $1/2$ - in Zusammenhang mit der Bibo-Stabilität in [25] angegeben worden. Für dieses Filter sollen nun die Gleichungen abgeleitet werden. Diese Gleichungen können dann leicht in ein Programm umgesetzt werden (Kapitel 2.4.2).

Das Wellendigitalfilter soll aus Dreitoradaptoren und einem Zweitoradaptor aufgebaut werden. Es sind dann 2 Dreitoradaptoren notwendig. Bild 2.9 gibt einen möglichen Aufbau an. Die Torwiderstände an den auch im 4-Tor-Adaptor (Bild 2.8) vorhandenen Toren sind durch die Bauelemente bestimmt und deren Wert ist entsprechend eingezeichnet. Die Größen im oberen Adaptor sollen durch ein ' gekennzeichnet werden, so daß sich die Formeln aus Kapitel 2.1 ohne weitere Indizierung verwenden lassen.

Der Torwiderstand R ergibt sich aus (2.1.17) zu

$$R = R_3' = R_1' + R_2' = 4 \quad (2.4.2)$$

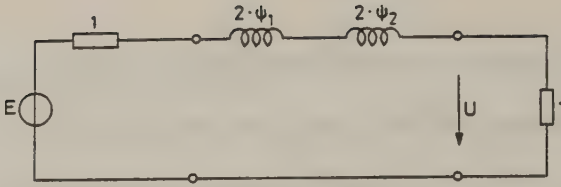


Bild 2.7 Ein zweidimensionales LC-Referenzfilter mit festen Werten der Bauelemente

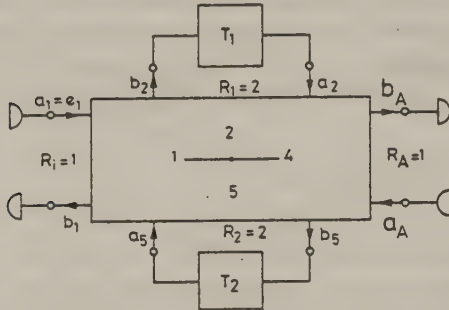


Bild 2.8 Zweidimensionales WDF mit einem 4-Tor-Adaptor und zwei Verzögerern zu dem Referenzfilter aus Bild 2.7

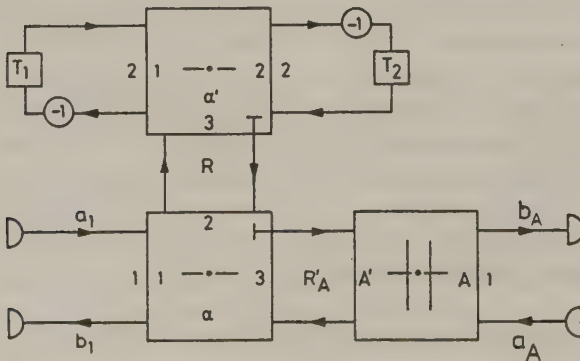


Bild 2.9 Das 2-D-WDF aus Bild 2.8 mit 2 Dreitor-adaptoren und einem Zweitoradaptor realisiert

Der Torwiderstand R_A' ergibt sich wieder mit (2.1.17) zu

$$R_A' = R_3 = R_1 + R_2 = R_1 + R_3' = 5 \quad (2.4.3)$$

Die Koeffizienten der Dreitoradaptoren ergeben sich aus (2.1.14) zu

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \quad (2.4.4)$$

$$\alpha' = \frac{R_1'}{R_1' + R_2'} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \quad (2.4.5)$$

Der Zweitoradapter hat mit (2.1.21) folgenden Koeffizienten

$$\gamma = \frac{R_A' - R_A}{R_A' + R_A} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3} \quad (2.4.6)$$

Damit ergeben sich die Gleichungen für die Signalgrößen aus (2.1.13) zu

$$b_1 = a_1 - \frac{1}{5} (a_1 + a_2 + a_3) \quad (2.4.7)$$

$$b_2 = a_2 - \frac{4}{5} (a_1 + a_2 + a_3)$$

$$b_3 = -a_1 - a_2$$

und

$$b_1' = a_1' - \frac{1}{2} (a_1' + a_2' + a_3') \quad (2.4.8)$$

$$b_2' = a_2' - \frac{1}{2} (a_1' + a_2' + a_3')$$

$$b_3' = -a_1' - a_2'$$

Für den Zweitoradapter ergeben sich die Gleichungen aus (2.1.20) zu

$$b_A' = -\frac{2}{3} \cdot a_A' \quad (2.4.9)$$

$$b_A = \frac{1}{3} \cdot a_A',$$

wobei davon Gebrauch gemacht worden ist, daß an der rechten Seite des Filters keine Quelle vorhanden ist und daher

$$a_A = 0 \quad (2.4.10)$$

gilt. Folgende Wellen sind aufgrund der Verbindung der Adaptoren identisch:

$$b_3' = a_2 \quad (2.4.12)$$

$$a_3' = b_2$$

$$b_A' = a_3$$

$$a_A' = b_3$$

Dies sind aber genau die Wellen, die nicht an den Toren des 4-Tor-Adaptors aus Bild 2.8 auftreten. Werden diese Größen nun aus den Gleichungen (2.4.7) bis (2.4.10) eliminiert, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$b_A = \frac{1}{3} (-a_1 + a_1' + a_2') \quad (2.4.13)$$

$$b_1' = \frac{1}{3} (2a_1 + a_1' - 2a_2')$$

$$b_2' = \frac{1}{3} (2a_1 - 2a_1' + a_2')$$

Dabei ist die Gleichung für die Welle b_1 nicht angegeben, da beim gewöhnlichen Filterbetrieb diese Größe nicht interessiert. Diese Gleichungen stellen nun die Gleichungen für einen Viertoradaptor gemäß Bild 2.8 dar. Die Differenzengleichungen ergeben sich daraus, wenn noch die von der Indizierung abhängigen Gleichungen für die Verzögerer eingesetzt werden. Es sind dies:

$$a_1'(m,n) = -b_1'(m-1,n) \quad (2.4.14)$$

$$a_2'(m,n) = -b_2'(m,n-1) .$$

2.4.2 Realisierung des 2-D-WDF als BASIC-Programm

Ausgehend von den Gleichungen aus dem letzten Kapitel wird ein Programm zur Realisierung dieses Filters erstellt. Dabei wird zur einfacheren Dokumentation auf die Programmiersprache BASIC zurückgegriffen, deren Programme auch ohne die Kenntnis der einzelnen Befehle weitgehend verständlich sind. Bei der Realisierung in Abschnitt 6 ist dagegen auf eine möglichst schnelle Realisierung der 2-D-WDF Wert gelegt worden und zu diesem Zweck der Rechner auf verschiedenen Programmebenen programmiert worden.

Als Eingangsfeld sei in Anlehnung an die Fernsehauflösung ein Feld mit 512×512 diskreten Werten (Bildpunkte, Abtastwerte) vorgegeben. Das Ausgangsfeld soll die gleiche Größe haben. Die Abarbeitung soll reihenweise erfolgen. Die Speicherwerte der T1-Verzögerer müssen daher nur einen einzigen Durchlauf des Algorithmus für die Realisierung des 4-Tor-Adaptors gespeichert werden. Es genügt daher eine einzige Variable, die im Programm die Bezeichnung B1 in Anlehnung an die Welle $b_1'(m,n)$ erhält. Die Speicherwerte des T2-Verzögerers müssen eine ganze Zeile gespeichert werden. Der dazu notwendige Vektor mit 512 Elementen soll die Bezeichnung B2(N) erhalten, wieder in Anlehnung an die Welle $b_2'(m,n)$. Die Reservierung des Speicherbedarfs für diesen Vektor kann im Programm auf folgende Art erfolgen:

```
1 DIMB2(512)
```

Die Gleichungen des 4-Tor-Adaptors können dann in ihrer mathematischen Form als Gleichungen zur Berechnung der Ausgangswellen verwendet werden. Die Eingangsgröße soll mit X und die Ausgangsgröße mit Y bezeichnet werden, wobei zur

Einsparung einer Multiplikation $2 \cdot b_A$ als Ausgangssignal betrachtet wird. In der Übertragungsfunktion (2.4.1) fällt daher der Faktor $1/2$ weg und es ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$H(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{1 + \psi_1 + \psi_2} \quad (2.4.15)$$

Neben den ausfallenden Wellen $B1$ und $B2(N)$ kommen in den folgenden Gleichungen noch die zugehörigen einfallenden Wellen $A1$ und $A2$ vor. Die Programmzeilen für die Adaptoren lauten damit:

```
7 Y=(-X(M,N)+A1+A2)/3
8 B1=(2*X(M,N)+A1-2*A2)/3
9 B2(N)=(2*X(M,N)-2*A1+A2)/3
```

Die Gleichungen der Speicher können folgendermaßen ins Programm umgesetzt werden:

```
5 A1=-B1
6 A2=-B2(N)
```

Zur Vervollständigung des Programmes müssen jetzt nur noch die Anweisungen für das Durchlaufen der Indizes zugefügt werden. Die Unterprogramme zum Einlesen und zur Ausgabe der Werte sind durch die Zeilen 4 und 10 symbolisiert.

```
1 DIMB2(512)
2 FOR M=1TO512
3 FOR N=1TO512
4 GOSUB*****REM EINLESEN VON X
5 A1=-B1
6 A2=-B2(N)
7 Y=(-X(M,N)+A1+A2)/3
8 B1=(2*X(M,N)+A1-2*A2)/3
9 B2(N)=(2*X(M,N)-2*A1+A2)/3
10 GOSUB*****REM AUSGABE VON Y
11 NEXTN
12 B1=0
13 NEXTM
```

Das Durchlaufen der Indizes geschieht dabei so, daß die in

Kapitel 2.2 angegebene spaltenweise Verarbeitung ausgeführt wird. In dieser Programmierung sind keine Maßnahmen zur Unterdrückung granularer Schwingungen vorgesehen. Es zeigten sich aber weder bei Festkommadarstellung, noch bei Gleitkommadarstellung Abweichungen der Ausgangswerte, die viel über die Größe der Quantisierungsstufe hinausgingen.

Die Speicherwerte am Rand des Feldes und damit die Werte für die Verzögerer am Beginn der Rechnung sind immer als Null angenommen worden. Dies geschieht im Rechner u.a. dadurch, daß dieser nicht definierte Größen (hier $B2(N)$ in der ersten Spalte $M=1$) immer gleich Null setzt. Beim Sprung in die nächste Spalte wird durch die Anweisung in Zeile 12 der T1-Verzögerer wieder auf den Wert Null gesetzt.

2.4.3 Direkte Realisierung der Übertragungsfunktion

Um einen Bezug zur Implementierung direkt aus der Übertragungsfunktion zu schaffen z.B. [1,26,27], soll auch ein Programm für diese Art der Implementierung angegeben werden. Ausgehend von der Übertragungsfunktion

$$H(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{1 + \psi_1 + \psi_2} \quad (2.4.15)$$

werden die Gleichungen (2.3.13)

$$\psi_1 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \quad (2.4.16)$$

$$\psi_2 = \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$$

eingesetzt. Man erhält dann die Übertragungsfunktion in z_1 und z_2 :

$$H(z_1, z_2) = \frac{z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 + 1}{3z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 - 1} \quad (2.4.17)$$

Daraus ergibt sich dann folgende Differenzengleichung:

$$y(m, n) = \frac{1}{3} [-y(m, n-1) - y(m-1, n) + y(m-1, n-1) \\ + x(m, n) + x(m-1, n) + x(m, n-1) + x(m-1, n-1)]$$

Es soll wieder eine spaltenweise Verarbeitung vorgenommen werden. Daraus ergibt sich, daß sowohl die Eingangsgröße X als auch die Ausgangsgröße Y eine Spaltenlang gespeichert werden muß. Für diese Größen wird je ein Vektor mit 512 Elementen benötigt. Der Filteralgorithmus läßt sich dann mit folgendem Programm durchführen:

```
1 DIMV2(512)
2 DIMX2(512)
3 FOR M=1TO512
4 FOR N=1TO512
5 GOSUB***** REM EINLESEN VON X
6 Y=(-Y2(N)-Y1+YD+X+X1+X2(N)+XD)/3
7 X1=X
8 XD=X2(N)
9 X2(N)=X
10 Y1=Y
11 YD=Y2(N)
12 Y2(N)=Y
13 GOSUB***** REM AUSGABE VON Y
14 NEXTN
15 XD=0
16 X2=0
17 YD=0
18 Y2=0
19 NEXTM
```

Wieder wird in der ersten Spalte der Verarbeitung davon Gebrauch gemacht, daß nicht definierte Größen den Wert Null erhalten.

Die hier vorgenommene direkte Realisierung ohne Zustandsvariablen ist etwas aufwendiger, da sowohl die

Ausgangsgröße Y als auch die Eingangsgröße X jeweils zwischen zwei Rasterpunkten und zwei Spalten gespeichert werden müssen. Bei der Realisierung mit Zustangsgrößen, wie dies beim WDF gemacht wird, müssen nur die Zustandsgrößen gespeichert werden. In einem Bildverarbeitungssystem, indem das gesamte Feld der Eingangsvariable und das gesamte Feld der Ausgangsvariable gespeichert werden, sind bei der direkten Realisierung keine zusätzlichen Speicher notwendig.

3. Stabilität in 2-D-Wellendigitalfiltern

Ein Hauptgrund für die Bedeutung der Wellendigitalfilter liegt darin, daß sie sich in allen Betriebsbedingungen [28,11,29,30] stabil gestalten lassen. Diese Tatsache gewinnt bei den mehrdimensionalen Systemen eine besondere Bedeutung, da die üblichen Methoden zur Erzielung der Stabilität bei Digitalfiltern sich nicht auf den mehrdimensionalen Fall erweitern lassen. Die Stabilität der Wellendigitalfilter läßt sich aber auch für den mehrdimensionalen Fall beweisen [31]. Hier sollen einige Punkte dieser Ergebnisse zusammengefaßt werden und als Beispiel das Programm aus dem letzten Abschnitt so erweitert werden, daß für das Filter die Stabilität nachweisbar ist.

3.1 Unterdrückung von parasitären Schwingungen in 2-D-Wellendigitalfilter

Wellendigitalfilter haben als Referenzfilter ein passives Reaktanzfilter. Diese Reaktanzfilter sind immer stabil und haben eine stabile Übertragungsfunktion. In einem nicht umfassenden Sinne werden die aus dieser Übertragungsfunktion abgeleiteten Digitalfilter (Ableitung des Digitalfilters aus der Übertragungsfunktion wie dies in Kapitel 2.4.3 gemacht wurde) als stabil bezeichnet. Es genügt für Digitalfilter aber keineswegs, wenn die Übertragungsfunktion stabil ist und damit die Stabilität im linearen Fall gegeben ist. Vielmehr muß genauer auf die Darstellung der Zahlen durch eine endliche Zahl von Stellen - bei der binären Darstellung der Zahlen als Bits bezeichnet-

eingegangen werden. Dies bedeutet, daß es auf der einen Seite eine kleinste Stufe geben muß, mit der Zahlen dargestellt werden, auf der anderen Seite es aber eine größte darstellbare Zahl geben muß. Die dadurch möglichen Instabilitäten sind in [28,31] als granulare Schwingungen bzw. Überlaufschwingungen bezeichnet worden. Beide zusammen werden dort als parasitäre Schwingungen bezeichnet. Für diese, besonders aber die granularen Schwingungen, ist auch noch die Bezeichnung Grenzyklen üblich [32] .

Das Verfahren zur Unterdrückung der parasitären Schwingungen basiert auf einer Verallgemeinerung der Passivität der Schaltung auch für den nichtlinearen Fall. Da bei einem Digitalfilter die Passivität keine physikalische Bedeutung mehr hat, sondern eine mathematische Formulierung darstellt, wurde dafür der Ausdruck Pseudopassivität eingeführt, und entsprechend die Ausdrücke Pseudoleistung und Pseudoenergie.

Bei rekursiven Digitalfiltern, wie dies die WDF sind, laufen im Filter berechnete Größen beim nächsten Iterationsschritt wieder in das Rechenwerk des Filters zurück. Sollen die Rechenoperationen des Filters ideal linear ausgeführt werden, so muß mit jedem Rechenzyklus die Anzahl der Stellen erhöht werden. Diese Erhöhung der notwendigen Stellenzahl ergibt sich hauptsächlich aus den Multiplikationen. Damit die Anzahl der notwendigen Stellen nicht ins Unendliche wächst, müssen Schneideoperationen (=Rundungsoperationen) durchgeführt werden, die die Anzahl der Stellen wieder reduzieren. Bei den Wellendigitalfiltern läßt sich eine einfache Art zur Erhaltung der Pseudopassivität und damit zur Unterdrückung von parasitären Schwingungen folgendermaßen erreichen:
Alle Rechenoperationen werden ideal durchgeführt. Die dadurch sich erhöhende Stellenzahl der auslaufenden Wellen

wird durch Schneideoperationen reduziert. Diese Schneideoperationen werden so ausgeführt, daß das Filter pseudopassiv bleibt. Dies ist bei eindimensionalen Wellendigitalfiltern der Fall, wenn für die durch

$$p(m) = \sum_{v=1}^{\tilde{n}+2} (a_v^2(m) - b_v^2(m)) / R_v = \sum_{v=1}^{\tilde{n}+2} p_v(m) \quad (3.1.1)$$

gegebene Abnahme der Pseudoleistung bei den Schneideoperationen für alle positiven, ganzzahligen m

$$p(m) \geq 0 \quad (3.1.2)$$

gilt, wobei die $a_v(m)$ die Wellen vor der Schneideoperation, die $b_v(m)$ die Wellen nach der Schneideoperation und die R_v die Torwiderstände sind. Das Summationsende $\tilde{n}+2$ wird durch die Anzahl der Tore gegeben. Die Bedingung (3.1.2) ist erfüllt, wenn für die einzelnen Schneideoperationen

$$p_v(m) \geq 0 \text{ für } 1 \leq v \leq \tilde{n} + 2 \text{ und } m=1,2,3,\dots \quad (3.1.3)$$

gilt. Für die Begrenzung der Wellengrößen entsprechend (3.1.3) nach oben gibt es mehrere Möglichkeiten, da die Wellen nur im Betrag nicht wachsen, wohl aber das Vorzeichen ändern dürfen. Die Begrenzung der Stellen von Werten zwischen zwei Quantisierungsstufen kann durch Abrundung auf die betragsmäßig nächst kleineren Werte erfolgen. In [28] und [31] sind genaue Regeln angegeben, die eine Hardwarerealisierung dieser Schneideoperationen ermöglichen. Insbesondere können bei Aufteilung des $\tilde{n}+2$ -Tor-Adaptors in einzelne Adaptoren zwischen diesen Adaptoren weitere Schneideoperationen entsprechend (3.1.3) durchgeführt werden, um damit die Zunahme der Stellen in einem Rechenzyklus weiter zu reduzieren. Das Verfahren zur Unterdrückung der parasitären Schwingungen läßt sich uneingeschränkt auf den mehrdimensionalen Fall erweitern.

Wird wieder von der idealen Berechnung innerhalb des $\tilde{n}+2$ -Tor-Adaptors ausgegangen, so ergibt sich mit Einhaltung von

$$p_v(m,n) = (a_v^2(m,n) - b_v^2(m,n))/R_v \quad (3.1.4)$$

$$p_v(m,n) \geq 0 \quad 1 \leq v \leq \tilde{n} + 2$$

für alle positiven, ganzzahligen m und n an allen Toren wieder eine Erhaltung der Pseudopassivität und damit die Unterdrückung von parasitären Schwingungen.

3.2 Beispiel für die Anwendung der Maßnahmen zur Unterdrückung von parasitären Schwingungen

Zu dem Programmbeispiel aus Kapitel 2.4.2 soll jetzt eine Erweiterung zugefügt werden, die die Freiheit von parasitären Schwingungen für das Filter garantiert. Dazu seien folgende Eigenschaften des Rechners vorausgesetzt:

1. Die Darstellung der Zahlen erfolgt in binärer Gleitkommadarstellung. Die Darstellung der Mantisse negativer Zahlen erfolgt durch das Zweierkomplement. Die Operation, die ganze Zahlen erzeugt, setzt die Binärstellen, die Werten kleiner 1 entsprechen, gleich Null.
2. Die Multiplikation wird so ausgeführt, daß keine Fehler entstehen, solange die Anzahl der notwendigen Stellen die Anzahl der Stellen der Mantisse nicht überschreitet.
3. Die Mantisse habe 28 Stellen, von denen die erste das Vorzeichen bestimmt.
4. Die in den Rechner gelangende Eingangsgröße ist eine ganze Zahl, deren Betrag durch

$$|x(m,n)| \leq 2^{16}-1 \quad (3.2.1)$$

beschränkt wird.

Zur Beschränkung der bei der Multiplikation zusätzlich zur

genauen Darstellung notwendigen Stellen, werden die Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Binärstellen dargestellt. Werden die Multiplikationen mit 2 bei den Additionen berücksichtigt, so kommt in diesem Fall in den Gleichungen (2.4.13) nur ein Koeffizient vor und zwar $1/3$. Dieser Koeffizient läßt sich durch eine achtstellige Binärzahl wie folgt annähern:

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0.01010101 & \text{binär} \\ = 0.33203125 & \text{dezimal} \end{array} \quad (3.2.2)$$

Die im Programm ausgeführten Multiplikationen erhöhen die Anzahl der Stellen damit um höchstens 8 Stellen. Die in (2.4.13) vorkommenden Additionen und Multiplikationen mit 2 können höchsten den 5-fachen Wert des Maximums der einfallenden Wellen erzeugen. Daher genügen für die präzise Ausführung dieser Operation 3 zusätzliche Binärstellen. Sind auch die neben der Eingangsgröße in das Filter laufenden Wellen beschränkt und zwar auf folgende Weise:

$$|a_1(m,n)| \leq 2^{16}-1 \quad (3.2.3)$$

$$|a_2(m,n)| \leq 2^{16}-1$$

, so können alle Rechenoperationen mit einer Stellenzahl von 28 präzise ausgeführt werden.

Die Betragsbeschränkungen (3.2.2) müssen durch Schneideoperationen ausgeführt werden, die die Bedingung (3.1.4) erfüllen. Dies kann im Programm durch folgende Anweisungen erfolgen:

```
1 s=2^16-1
51 ifabs(a1)>s then a1=s*san(a1):goto70
61 ifabs(a2)>s then a2=s*san(a2):goto70
```

In diesem Fall wird eine Sättigungscharakteristik ausgeführt. Dies geschieht dadurch, daß bei Überschreitung des zulässigen Betragsmaximums dieses verwendet wird und

zusätzlich mit dem Vorzeichen multipliziert wird. Bei Verwendung der Sättigungscharakteristik sind die 2-D-WDF zusätzlich antwortstabil [29,11]. Zur Erfüllung der Bedingung (3.1.4) kann die Multiplikation mit dem Vorzeichen auch unterbleiben.

Die zweite Aufgabe der Schneideoperationen ist das Beschneiden der Stellen, die bei der Multiplikation entstanden sind und einen Wert kleiner 1 repräsentieren. Dies wird durch das Bilden von ganzen Zahlen ausgeführt:

```
52 A1=INT(A1)
```

```
62 A2=INT(A2)
```

Da der Rechner im Zweierkomplement arbeiten soll, führen die Anweisungen im Falle negativer Zahlen zu betragsmäßig maximal um 1 größeren Zahlen. Um weiterhin die Bedingung (3.1.4) zu gewährleisten, wird das Programm noch erweitert um:

```
53 IF A1<0 THEN A1=A1+1
```

```
63 IF A2<0 THEN A2=A2+1
```

Das gesamte Programm hat dann folgende Form:

```
1 s=2^16-1
2 c=.33203125
10 dim b2(512)
20 for m=1 to 512
30 for n=1 to 512
40 gosub*****rem einlesen von x
50 a1=-b1
51 if abs(a1)>s then a1=s*sgn(a1): goto 70
52 a1=int(a1)
53 if a1<0 then a1=a1+1
60 a2=-b2(n)
61 if abs(a2)>s then a2=s*sgn(a2): goto 70
62 a2=int(a2)
63 if a2<0 then a2=a2+1
70 y=(-(x(m,n)+a1+a2)/3
80 b1=(2*x(m,n)+a1-2*a2)/3
90 b2(n)=(2*x(m,n)-2*a1+a2)/3
100 gosub*****rem ausgabe von y
110 next n
120 b1=0
130 next m
```

Die Rundungsoperationen, die mit den Größen $a_1(m,n)$ und $a_2(m,n)$ ausgeführt worden sind, müßten noch auf die Ausgangsgröße $y(m,n)$ angewandt werden, wenn analog zu den in [28,31] angegebenen Maßnahmen gearbeitet werden soll. Da die Ausgangsgröße aber nicht den rekursiven Prozeß beeinflußt, bleiben die Auswirkungen eines Unterlassens dieser Maßnahmen gering:

1. Das Ausgangssignal kann u.U. dreimal so groß wie das Eingangssignal werden
2. Es können granulare Schwingungen auftreten, für deren Größe aber nach genügend langer Abschaltzeit des Eingangssignals gelten muß:

$$|y(m,n)| \leq 1$$

(3.2.4)

Betrachtet man den Programmaufwand, den die Maßnahmen zur Unterdrückung von parasitären Schwingungen bei der beschriebenen Realisierung auf dem Rechner erfordern, so ist dieser nicht unerheblich. Die Ausführung der eingefügten Programmteile erfordert wesentliche zusätzliche Rechenzeit. Bei einer Hardwarerealisierung kann die Unterdrückung der parasitären Schwingungen jedoch mit geringem Mehraufwand durchgeführt werden, wenn die in [28] angegebenen Regeln zur Bestimmung der auslaufenden Wellen verwendet werden. Bei der Hardwarerealisierung von [33,12] lag der Aufwand in der Größenordnung des Aufwands zur Berechnung einer einzelnen Binärstelle. Bei der Realisierung von 2-D-WDF auf einem Mikrorechner, die im letzten Abschnitt behandelt wird, sind die notwendigen Maßnahmen durch Mikroprogrammierung effizienter gelöst worden. Die Voraussetzung für eine solche Programmierung ist, daß die Wortlänge mit Hilfe einfacher Operationen bei einigen Berechnungen erhöht, sonst aber die Ganzzahldarstellung mit voller Wortlänge verwendet werden kann.

3.3 Bibostabilität in 2-D-Wellendigitalfiltern

Im eindimensionalen Fall wird ein lineares System als stabil bezeichnet, wenn nach Abschalten des Eingangssignals, das Ausgangssignal auf den Wert Null abklingt. Diese Stabilität läßt sich aus der Lage der Polstellen der Übertragungsfunktion nachweisen. Ein solches stabiles System ist auch immer Bibo-stabil. Ein System wird als bibo-stabil bezeichnet, wenn das Ausgangssignal beschränkt bleibt, solange das Eingangssignal beschränkt ist.

Im mehrdimensionalen Fall lassen sich die Nenner der Übertragungsfunktionen nicht mehr generell faktorisieren. Damit wird ein Nachweis der Stabilität der Filter aus Kenntnis der Lage der Polstellen der Übertragungsfunktion unmöglich. Aus diesem Grund ist zur Beurteilung der Stabilität von mehrdimensionalen Filtern auch die Bibostabilität herangezogen worden [34,35,36]. Dabei sind die Systeme so behandelt worden, als seien sie streng linear. Auf die Effekte der begrenzten Stellenzahl ist nicht eingegangen worden.

Ein anderer Weg zur Erzielung von mehrdimensionalen stabilen Digitalfiltern ist die Übernahme der Übertragungsfunktion eines mehrdimensionalen LC-Filters z.B. [37]. Bei genauer Untersuchung hat sich gezeigt, daß die daraus entstehenden Systeme nicht mehr unbedingt das Kriterium der Bibostabilität erfüllen müssen [36,25]. Dabei ist besonders die Befürchtung ausgesprochen worden, daß durch die Darstellung der Koeffizienten mit begrenzter Stellenzahl selbst im Idealfall noch stabile Systeme unstabil werden können. Auf die Effekte der endlichen Stellenzahl der Signale ist nicht eingegangen worden. In [25] ist als Beispiel die Übertragungsfunktion (2.4.15) eines zweidimensionalen LC-Filters angegeben worden, die nicht mehr bibo-stabil ist. Auf eine Bedeutung dieser

Tatsache für die Realisierung des Filters ist nicht eingegangen worden.

Die Stabilität der Wellendigitalfilter (Freiheit von parasitären Schwingungen) kann auch im mehrdimensionalen Fall a priori ohne Untersuchung der Übertragungsfunktion generell bewiesen werden. Die Darstellung der Koeffizienten mit einer endlichen Stellenzahl bereitet dabei keine Schwierigkeiten, da diese unabhängig voneinander einen großen Bereich durchlaufen können.

Zur Überprüfung der Bibostabilität eines 2-D-Filters wird die Übertragungsfunktion in den Variablen z_1 und z_2 bestimmt. Aus der Lage der Pole dieser Übertragungsfunktion läßt sich dann die Frage der Bibostabilität beantworten. Liegen alle Pole innerhalb der Einheitsscheibe $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, so ist das Filter bibo-stabil. Hat die Übertragungsfunktion auf dem Rand der Einheitsscheibe $|z_1|=1$ und $|z_2|=1$ Singularitäten 2. Art, so kann das Filter bibo-instabil sein [25].

Bei 2-D-Wellendigitalfiltern liegen die Pole bezüglich der z -Variablen immer innerhalb oder auf dem Rand der Einheitsscheibe, da sonst die Filter im Sinne der klassischen Theorie instabil wären. Ist nun ein solches Filter bibo-instabil, so hat es Pole (oder einen Pol) auf dem Rand der Einheitsscheibe. Dies ist an sich irrelevant, da ja gemäß Abschnitt 3.1 und 3.2 die erforderliche Stabilität gesichert werden kann. Möchte man jedoch an der eigentlichen Bibostabilität festhalten, so kann auch diese durch eine leichte Variation der Struktur und/oder der Bauelemente des Referenzfilters gesichert werden, denn hierdurch können die betrachteten Pole immer vom Rand der Einheitsscheibe weg in die Stabilitätszone verschoben werden. Die Variation der Struktur kann beispielsweise durch Einfügen von Widerständen im Referenzfilter erfolgen, deren Wirkung auf die Übertragungsfunktion beliebig gering gehalten werden kann.

4. Zweidimensionale Wellendigitalfilter mit kreissymmetrischem Übertragungsverhalten

Die Approximation des kreissymmetrischen Tiefpass-Verhaltens erfolgt durch Kaskadierung von Einzelfiltern. Als Maßstab für die Annäherung an die Kreissymmetrie wird die Größe des Übergangsbereiches in einem kreisförmigen Tiefpasstoleranzschema genommen. Die Einzelfilter sollen mit Hilfe von Transformationen aus eindimensionalen Filtern abgeleitet werden. Dazu stehen 2 Transformationsarten zur Verfügung. Dabei werden zuerst nur solche Transformationen zugelassen, die sich ohne eine Multiplikation realisieren lassen. Dies kann bei der Realisierung zu Lösungen mit besonders geringen Aufwand führen.

Ausgehend von diesen multiplikationsfreien Transformationen werden mit Hilfe idealer Tiefpassfilter Vielecke so realisiert, daß diese ein möglichst enges Toleranzschema erfüllen. Das Hauptgewicht der Untersuchung liegt auf Tiefpässen, deren Durchlassbereiche weite Teile des zulässigen Frequenzbereiches überdecken. Es zeigt sich, daß auch mit beliebiger Anzahl von Ecken, die Annäherung an die Kreissymmetrie nicht beliebig verbessert werden kann.

Die erhaltenen Ergebnisse lassen sich nicht nur für Filter aus idealen Einzelfiltern verwenden. Es ergeben sich auch hinreichende Bedingungen zur Entnahme von geeigneten Einzelfiltern aus Filterkatalogen oder mit Hilfe von Optimierungsverfahren.

Im letzten Kapitel dieses Abschnitts sollen die möglichen Verbesserungen der Approximation an die Kreissymmetrie untersucht werden, wenn für die Realisierung der Transformationen auch allgemeine Multiplikationen zugelassen werden.

4.1 Erläuterung des Toleranzschemas und des angewandten Verfahrens

Bei der Bildverarbeitung, einem Sonderfall der zweidimensionalen Signalverarbeitung, spielen Tiefpassfilter mit kreissymmetrischem Übertragungsverhalten eine besondere Rolle. Diese Filter sollen unabhängig von der Winkellage des Eingangssignals das gleiche Filterverhalten zeigen. Bild 4.1 zeigt das Toleranzschema für einen 2-D-Tiefpass in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene. Innerhalb des Kreises mit dem Radius R_D darf die Dämpfung den Wert $A_{\max}$ nicht überschreiten (Durchlaßbereich). Außerhalb des Kreises mit dem Radius R_S muß die Dämpfung mindestens den Wert $A_{\min}$ haben (Sperrbereich). Der Bereich zwischen den beiden Kreisen

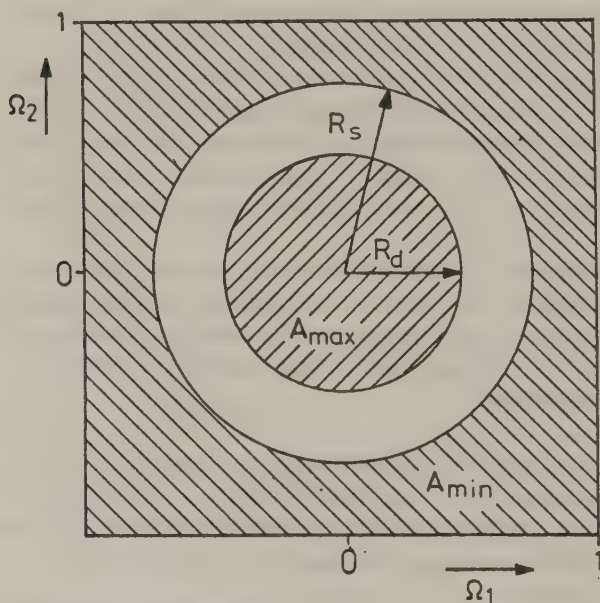


Bild 4.1 Kreisförmiges Toleranzschema für Tiefpassfilter

wird als Übergangsbereich bezeichnet. Um den Begriff der Kreissymmetrie zu präzisieren, sollen folgende zusätzliche Bedingungen an das Toleranzschema gestellt werden:

$$\frac{R_S^2}{R_D^2} \leq 2 \quad (4.1.1)$$

$$A_{\min} > 2 A_{\max}$$

Diese Bedingungen sind so gestellt, daß ein Quadrat gerade noch als Approximation der Kreissymmetrie gilt (Bild 4.2).

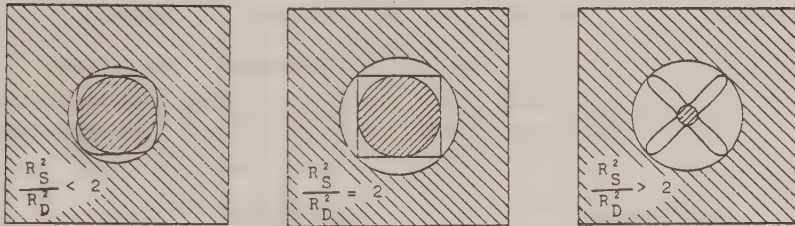


Bild 4.2 Kreisförmige Toleranzschemata mit unterschiedlich breiten Übergangsbereichen. Die durchgezogenen Linien innerhalb der Übergangsbereiche sollen Trennlinien zwischen Durchlaß- und Sperrbereich von Filtern darstellen, die das Toleranzschema jeweils erfüllen.

Die Approximation des kreissymmetrischen Verhaltens wird bei den vorgestellten Verfahren - wie bei den meisten anderen Vorschlägen auch [1,2,3,38]- durch Kaskadierung von einzelnen Filtern erreicht. Zuerst wird in einem Quadranten die Kreissymmetrie angenähert (Bild 4.3). Wegen der Symmetrieeigenschaften des Betrags der Übertragungsfunktion ist auch im gegenüberliegenden Quadranten die Kreissymmetrie angenähert. Für die zwei anderen Quadranten wird ein um 90°

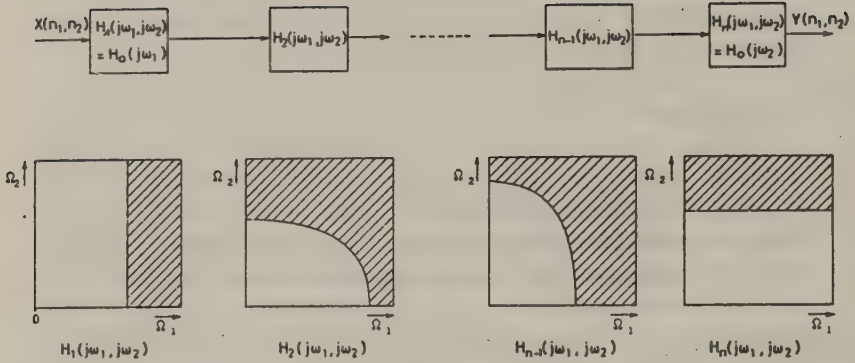


Bild 4.3 Approximation eines Kreisbogens durch Kaskadierung von gedrehten Filtern. Die idealisierten Bereiche sind weiß (Durchlaßbereich) und schraffiert (Sperrbereich)

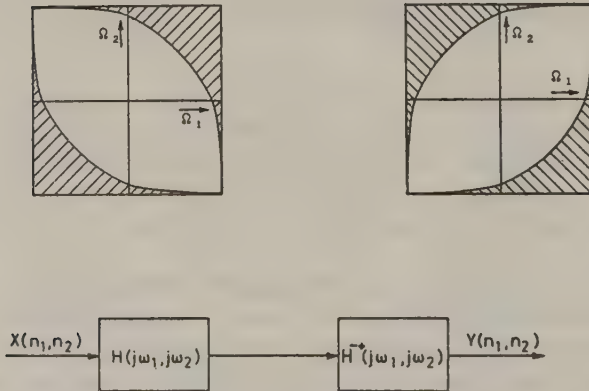


Bild 4.4 Die Übertragungsfunktionen $H(j\omega_1, j\omega_2)$ und $H^+(j\omega_1, j\omega_2)$ haben ein um 90° gedrehtes Übertragungsverhalten

gedrehtes Filter verwendet (Bild 4.4). Diese Drehung läßt sich erreichen wenn eine der beiden Verarbeitungsrichtungen gedreht wird. Für die Übertragungsfunktion bedeutet dies:

$$H^{-*}(j\omega_1, j\omega_2) = H(-j\omega_1, j\omega_2) \quad (4.1.2)$$

$$H^{*-}(j\omega_1, j\omega_2) = H(j\omega_1, -j\omega_2) \quad (4.1.3)$$

Die einzelnen Teilfilter entstehen durch Transformation eines eindimensionalen Wellendigitalfilters. Es ist sowohl eine Transformation im ψ -Bereich als auch eine Transformation im z -Bereich möglich. Die Transformation im ψ -Bereich (A) hat folgende Form:

$$\psi = c_1 \cdot \psi_1 + c_2^* \cdot \psi_2 \quad (4.1.4)$$

Die Transformationslinien

$$\psi = c_1 \cdot \psi_1 + c_2 \cdot \psi_2 = \text{const.} \quad (4.1.5)$$

sind Geraden in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene (Bild 4.5) mit dem Drehwinkel.

$$\theta = \arctan \frac{c_2}{c_1} \quad (4.1.6)$$

In der α_1 - α_2 -Ebene ergeben sich gebogene Linien (Bild 4.6). Die Transformation im z -Bereich (B) hat folgende Form:

$$z = z_1^m \cdot z_2^n \quad m, n \text{ ganzzahlig} \quad (4.1.7)$$

Die Transformationslinien von (B) sind Geraden in der α_1 - α_2 -Ebene mit dem Drehwinkel

$$\theta = \arctan \frac{n}{m} \quad (4.1.8)$$

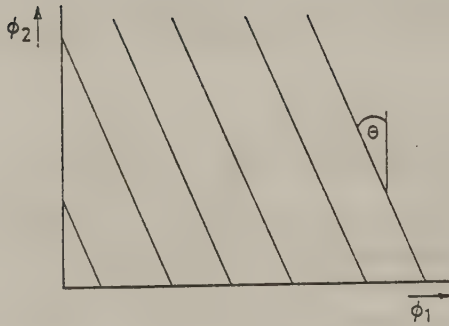


Bild 4.5 Die Transformationslinien $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 = \text{const.}$ in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene

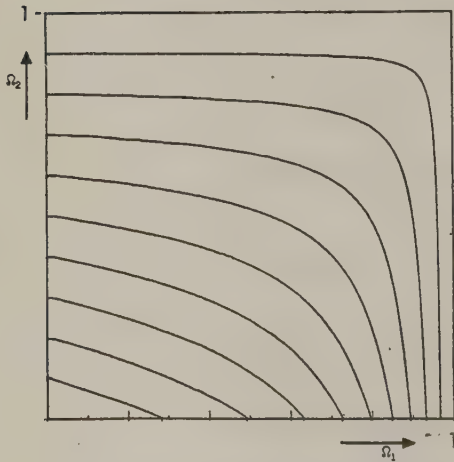


Bild 4.6 Die Transformationslinien $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 = \text{const.}$ in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene für $\theta = 71.56^\circ$

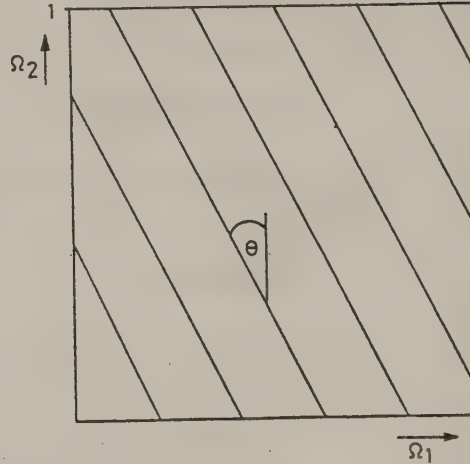


Bild 4.7 Die Transformationslinien $z = z_1^m \cdot z_2^n = \text{const.}$ in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene

, wie dies in Bild 4.7 eingezeichnet ist.

Kaskadierungen von gedrehten Filtern, die mit der Transformation (B) erzeugt wurden, ergeben im Falle idealer Einzelfilter Filter, deren Trennlinien zwischen Sperr- und Durchlassbereich Vielecke in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene bilden. Bei dieser Transformation erhöht sich die Anzahl der Speicher gegenüber dem 1-D-Fall, der restliche Aufwand bleibt aber unverändert. Die durch die Transformation verursachte Veränderung der Nyquistbereiche muß berücksichtigt werden, um Aliasingeffekte zu vermeiden [1,38,39]. Da für m und n ganze Zahlen gewählt werden müssen, sind nur bestimmte Winkel möglich.

Die Kaskadierung von idealen Filtern, die aus 1-D-Filtern mit Hilfe der Transformation (A) entstanden sind, erzeugen in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene Trennlinien zwischen Durchlass- und Sperrbereich in der Form von "runden Vielecken". Diese runden Vielecke nähern sich mit fallendem Ω_1 und Ω_2 immer mehr geraden Vielecken. Werden bei den Transformationen (A) und (B) gleiche Winkellagen der Einzelfilter gewählt, so ergeben sich für Ω_1 und Ω_2 gegen Null bezüglich der Abweichung von der Kreissymmetrie die gleichen Grenzwerte.

4.2.1 Eindimensionale Filter für zweidimensionale Signale (Separable Filter)

Aus den Filtern mit der Übertragungsfunktion $H'(j\omega)$ und $H''(j\omega)$ können die beiden Filter mit den Übertragungsfunktionen

$$H^{10}(j\omega_1, j\omega_2) = H'(j\omega_1) \quad (4.2.1)$$

$$H^{01}(j\omega_1, j\omega_2) = H''(j\omega_2) \quad (4.2.2)$$

abgeleitet werden. Dies entspricht bei der Transformation (A) dem Fall

$$c_1 = 1 ; \quad c_2 = 0 \quad (4.2.3)$$

bzw. dem Fall

$$c_1 = 0 ; \quad c_2 = 1 \quad (4.2.4)$$

Bei der Transformation (B) entspricht dies dem Fall $m=1$ und $n=0$ bzw. $m=0$ und $n=1$. Aus diesem Grunde ist in (4.2.1) und (4.2.2) die Kennzeichnung 10 und 01 gewählt worden. Bei der Verarbeitung werden die einzelnen Spalten (bzw. Reihen) des Eingangssignals unabhängig voneinander als eindimensionale Signale mit einem Filter mit der Übertragungsfunktion $H'(j\omega)$ bzw. $H''(j\omega)$ verarbeitet. Die Verarbeitung der einzelnen Spalten (bzw. Reihen) kann dann prinzipiell auch parallel erfolgen. Die Zustandsgrößen müssen nur bis zum nächsten Abtastpunkt gespeichert werden. Erfolgt die Verarbeitung jedoch nicht entlang der Spalten (Reihen) des Eingangssignals, so müssen die Zustandsgrößen über mehrere Punkte hinweg gespeichert werden. Bei einer spaltenweisen Abarbeitung des Filters mit der Übertragungsfunktion

$$H^{10}(j\omega_1, j\omega_2) = H'(j\omega_1) \quad (4.2.5)$$

müssen alle Zustandsgrößen eine volle Spalte lang gespeichert werden. Wie oben aufgeführt ist bei den Filtern zur Approximation der Kreissymmetrie in allen vier Quadranten eine zweite Bearbeitung mit einer im Vorzeichen geänderten Indexvariablen notwendig. Dieser Vorgang kann nicht mit einem einzigen Durchlaufen der Indizes erreicht werden. Die erste Verarbeitung kann spaltenweise, die zweite Verarbeitung reihenweise erfolgen. Da die Übertragungsfunktionen $H'(j\omega)$ bzw. $H''(j\omega)$ betragsmäßig in

der Frequenz ω symmetrisch sein müssen, können die Filter beiden Verarbeitungsschritten zugeordnet werden. Daher kann die Speicherung der Zustandsgrößen einer ganzen Spalte (bzw. Reihe) vermieden werden. Bei der Realisierung der Übertragungsfunktionen bleibt die Anzahl der Speicherelemente und der Aufwand für die Berechnungen gegenüber dem 1-D-Fall gleich. Die Verwendung beider Filter ist somit in Hinblick auf den Grad der Übertragungsfunktion als auch in Hinblick auf den Verarbeitungsaufwand günstig.

Treten beide Übertragungsfunktionen auf, so wird die resultierende Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} H(j\omega_1, j\omega_2) &= H^{10}(j\omega_1, j\omega_2) \cdot H^{01}(j\omega_1, j\omega_2) \quad (4.2.6) \\ &= H'(j\omega_1) \cdot H''(j\omega_2) \end{aligned}$$

als separabel (bezüglich ω_1 und ω_2) bezeichnet. Die Trennlinie zwischen Durchlaß- und Sperrbereich bei Verwendung idealer Filter ist ein Rechteck.

4.2.2 Teilfilter mit symmetrischem Verhalten bezüglich ω_1 und ω_2 .

Wird die Transformation (B) so gewählt, daß

$$z = z_1 \cdot z_2$$

so ergibt sich ein um 45 Grad gedrehtes Filter. Der zusätzliche Aufwand ist die Verdoppelung der Anzahl der Speicherelemente. Bei alleiniger Verwendung dieser Transformation ergibt sich kein Vorteil gegenüber dem separablen Fall, da sich das gleiche Quadrat um 45° gedreht ergibt.

Bei der Transformation (A) ergibt sich ein in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene um 45° gedrehtes Filter, wenn $c_1 = c_2$ gewählt wird. In der α_1 - α_2 -Ebene ergeben sich dann die in Bild 4.8

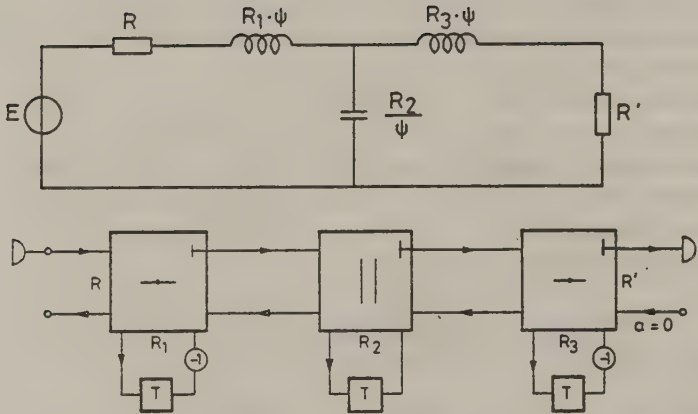


Bild 4.9 WDF (unten) mit Tiefpassreferenzfilter (oben)

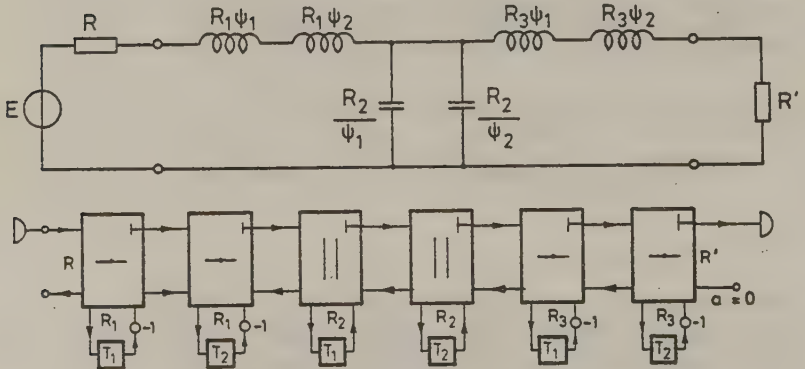


Bild 4.10 2-D-Referenzfilter, das aus dem Referenzfilter von Bild 4.9 entsteht, wenn die Transformation $\psi = \psi_1 + \psi_2$ verwendet wird (oben) und ein zugehöriges 2-D-WDF (unten)

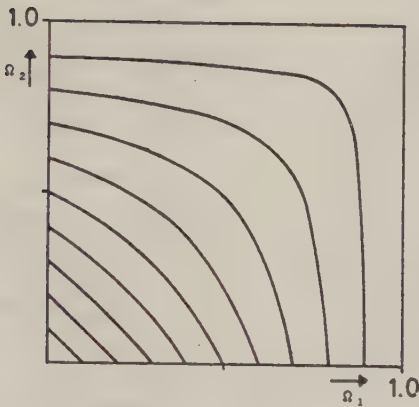


Bild 4.8 Linien konstanter Dämpfung bei Verwendung der Transformation $\psi = \psi_1 + \psi_2$

gezeichneten Linien konstanter Dämpfung. Die Realisierung eines solchen Filters ist mit verschiedenen Strukturen von Wellendigitalfiltern möglich. Zur Veranschaulichung sei der Tiefpass in Bild 4.9 gewählt. Die Anwendung der Transformation (A) ergibt das Referenzfilter von Bild 4.10. Die direkte Realisierung mit Dreitoradaptoren ergibt das Wellendigitalfilter von Bild 4.10. Jetzt seien zwei Kapazitäten aus dem Referenzfilter herausgegriffen (Bild 4.11). Die direkte Realisierung mit Dreitoradaptoren läßt sich durch eine Realisierung mit einem Viertoradapter ersetzen (Bild 4.11). Die Formeln für den Viertoradapter können aus den Formeln von 2 Dreitoradaptoren durch Eliminierung der beiden nicht nach außen geführten Wellen hergeleitet werden, wie dies in Kapitel 2.4.1 gemacht wurde. Die Anzahl der Additionen bei der Abarbeitung des Filters reduziert sich um 1 pro Viertoradapter gegenüber der Verwendung von 2 Dreitoradaptoren [40]. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die beiden Kapazitäten mit einem Dreitoradapter zusammenzufassen und diese dann an die

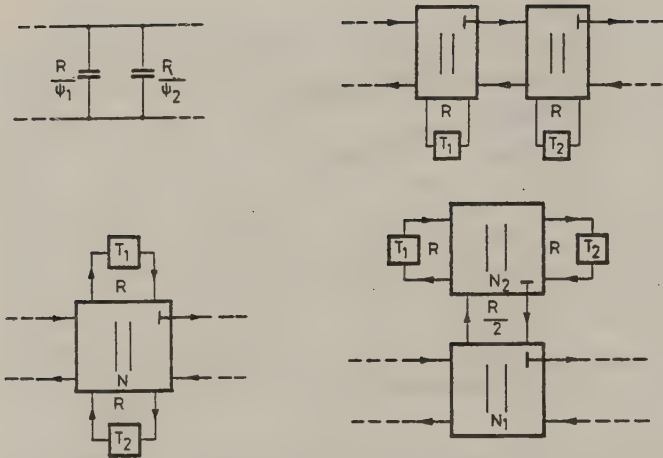


Bild 4.11 Verschiedene Möglichkeiten zur Realisierung von zwei Kapazitäten in Parallelschaltung:
oben links: Ausschnitt aus dem Referenzfilter
oben rechts: Realisierung mit 2 Adaptoren
unten rechts: andere Realisierung mit 2 Adaptoren
unten links: Realisierung mit einem 4-Tor-Adaptor

übrigen Bauelemente des Filters zu schalten (Bild 4.11). Der Torwiderstand am Verbindungstor der beiden Adaptoren wird zu

$$R_3 = R/2 \quad (4.2.8)$$

gewählt. Damit ist

$$R_3 = 1/(1/R_1 + 1/R_2) \quad (4.2.9)$$

und das Verbindungstor reflexionsfrei. Entsprechendes Vorgehen ist bei den Serienadaptoren mit den Induktivitäten möglich (Bild 4.11'). Das gesamte 2D-Wellendigitalfilter sieht dann so aus wie das eindimensionale Filter, bei dem

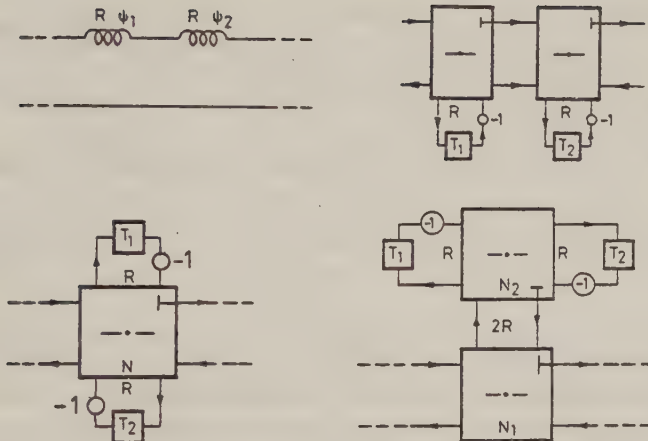


Bild 4.11' Verschiedene Möglichkeiten zur Realisierung von 2 Induktivitäten in Serienschaltung (Zuordnung wie in Bild 4.11)

jedoch die Speicherelemente T durch Parallel- (bzw. Serien-)adaptoren mit je einem Speicherelement T_1 und T_2 ersetzt sind (Bild 4.12). Der Multiplikationskoeffizient ergibt sich für den Paralleladaptor als

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \quad (4.2.10)$$

für den Serienadaptor als

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \quad (4.2.11)$$

Diese Koeffizienten bedeuten, daß nur eine Verschiebung um eine Stelle zur Ausführung der Multiplikation im Dreitoradaptor notwendig ist. Solche Strukturen werden als multipliziererfreie Strukturen bezeichnet [42,43]. Es liegen dann hier multipliziererfreie Adaptoren vor.

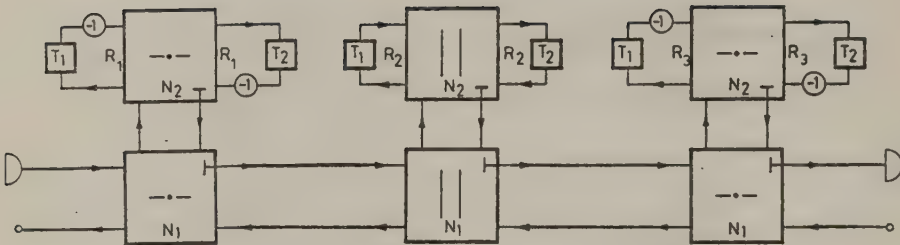


Bild 4.12 Andere Realisierung des 2-D-WDF aus Bild 4.10

Die am Beispiel erläuterte Umwandlung eines 1-D-WDF läßt sich immer vornehmen. Für den Fall, daß im Referenzfilter die Kapazitäten in Parallelschaltung und die Induktivitäten in Reihenschaltung vorliegen, sind die Umwandlungen in Bild 4.11 und 4.11' angegeben. Die anderen Fälle lassen sich durch Vertauschen von Induktivitäten und Kapazitäten behandeln.

Die Transformation

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (4.2.12)$$

kann daher mit bezüglich der Multizierer sehr geringem Aufwand realisiert werden (Multipliziererfreie Adaptoren). Es sind dann pro reaktivem Element im Referenzfilter 4 zusätzliche Addierer notwendig. Die Anzahl der Speicherelemente verdoppelt sich gegenüber dem 1-D-Fall, wie dies auch bei der Transformation

$$z = z_1 \cdot z_2 \quad (4.2.13)$$

der Fall war.

4.2.3 Andere einfach zu realisierende Transformationen.

Für die Transformation (B) sind die beiden nächsten möglichen Fälle

$$z = z_1 \cdot z_2^2 \quad (4.2.14)$$

$$z = z_1^2 \cdot z_2 \quad (4.2.14')$$

Der Drehwinkel ergibt sich zu

$$\theta = \arctan 2 = 63.43^\circ \quad (4.2.15)$$

und

$$\theta = \arctan 1/2 = 26.56^\circ \quad (4.2.15')$$

Die Transformation (B) verursacht eine Drehung der sich periodisch wiederholenden Spektren der Übertragungsfunktion in der ω_1 - ω_2 -Ebene. Dadurch gelangen bei einem Tiefpass weitere Durchlassbereiche in den Nyquistbereich. Die Vermeidung von dadurch verursachten Aliasingeffekten kann für die beiden Fälle (4.2.14) und (4.2.14') durch eine Verdoppelung der Abtastrate (z. B. durch Interpolation von Zwischenwerten) erfolgen [1,38,39] (Beispiel: Bild 4.13).

Für die Transformation (A) soll ein weiterer Fall untersucht werden, der durch Austausch der Speicher des 1-D-WDF gegen multipliziererfreie Adaptoren mit je 2 Speichern realisiert werden kann. Dies ist der Fall, wenn der Koeffizient

$$\alpha = 1/4 \quad \text{bzw.} \quad \beta = 1/4 \quad (4.2.16)$$

gewählt wird. Die Multiplikation läßt sich dann durch eine Verschiebung um 2 Bit ausführen. Das Verbindungstor soll wieder reflexionsfrei gewählt werden. Es folgt für den Serienadaptor aus (2.1.14) und (4.1.4)

$$\alpha = \frac{c_1}{c_1 + c_2} = \frac{1}{4} \quad (4.2.17)$$

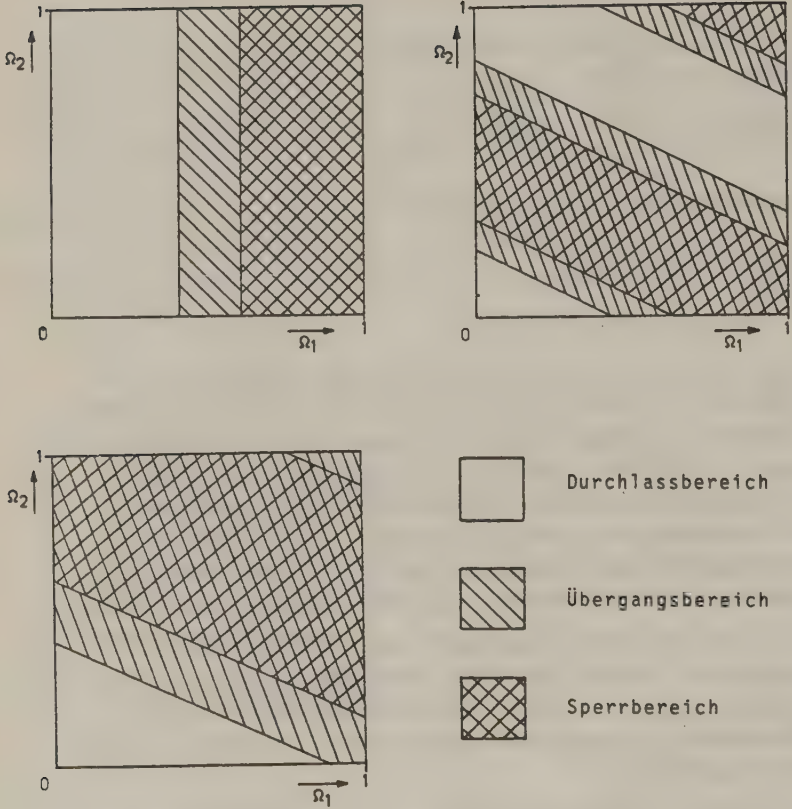


Bild 4.13 Beispiel für die Anwendung der Transformation $z = z_1 \cdot z_2^2$
 oben links: das ungedrehte Einzelfilter
 oben rechts: das gedrehte Teilfilter
 unten links: das gedrehte Teilfilter nach Verdoppelung der Betriebsrate in beiden Abtastrichtungen

und damit

$$c_2 = 3c_1 \quad (4.2.18)$$

oder

$$\alpha = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \quad (4.2.17')$$

und damit

$$c_1 = 3c_2 \quad (4.2.18')$$

Für den Paralleladaptor folgt entsprechend aus (2.1.16) und (4.1.4)

$$\beta = \frac{c_1}{c_1 + c_2} = \frac{1}{4} \quad (4.2.19)$$

und damit

$$c_2 = 3c_1 \quad (4.2.20)$$

oder

$$\beta = \frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{1}{4} \quad (4.2.19')$$

und damit

$$c_1 = 3c_2 \quad (4.2.20')$$

Der durch ' gekennzeichnete Fall ergibt sich auch, wenn nicht die beiden Tore vertauscht werden, sondern der Koeffizient $3/4$ verwendet wird. Der Drehwinkel in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene ist durch (4.1.6) gegeben; so daß sich in diesem Fall

$$\theta = \arctan 3 = 71.56^\circ \quad (4.2.21)$$

oder

$$\vartheta = \arctan 1/3 = 18.43^\circ \quad (4.2.21')$$

ergibt.

Um den Zusammenhang mit der Transformation (B) herzustellen, soll noch

$$\arctan 3 = \arctan \frac{1}{2} = 45^\circ \quad (4.2.22)$$

angegeben werden. Daher haben die Geraden $\psi = \text{const.}$ der Transformation

$$\psi = \psi_1 + 3\psi_2 \quad (4.2.23)$$

in der $\phi_1 - \phi_2$ -Ebene in einem um 45° gedrehten Koordinatensystem die gleiche Steigung wie die Transformationslinien die sich aus der Transformation $z = z_1^2 \cdot z_2$ in der $\alpha_1 - \alpha_2$ -Ebene ergeben. Entsprechendes gilt für die Transformation

$$\psi = 3\psi_1 + \psi_2 \quad (4.2.23')$$

und die Transformation $z = z_1 \cdot z_2^2$:

$$\arctan 2 = \arctan \frac{1}{3} = 45^\circ \quad (4.2.22')$$

Wie schon erwähnt ist in der Nähe des Ursprungs die Kurvenform in der $\phi_1 - \phi_2$ -Ebene ähnlich wie in der $\alpha_1 - \alpha_2$ -Ebene, im Grenzfall sogar identisch. Daher lassen sich in der Nähe des Ursprungs mit beiden Transformationen sehr ähnliche Ergebnisse erzielen.

4.3 Vieleckfilter aus idealen Einzelfiltern

Es seien jetzt Vieleckfilter betrachtet, die sich ergeben, wenn die Transformationen aus den vorherigen Kapiteln angewendet werden. Dabei sollen die Einzelfilter ideale eindimensionale Tiefpässe sein, deren Trennfrequenzen verschieden sein können. Die Trennfrequenzen sind im einzelnen nicht angegeben, werden aber immer optimal gewählt. Diese Filter werden mit

$$H_I(z) \quad \text{oder} \quad H_I(\psi) \quad (4.3.1)$$

bezeichnet, wobei der Zusammenhang zu α durch (2.1.1) bis (2.1.7) gegeben ist. Die Größe F soll das Verhältnis zwischen der Fläche des Übergangsbereiches und der Fläche des Durchlassbereiches des engsten Toleranzschemas angeben, das das Vieleckfilter erfüllt (Bild 4.1). Zwischen den Radien der Kreise im Toleranzschema (Bild 4.1) und F besteht folgender Zusammenhang:

$$F = \frac{R_S^2}{R_D^2} - 1 \quad (4.3.2)$$

oder auch

$$R_S = R_D \sqrt{1+F} \quad (4.3.3)$$

,wobei R_S Sperrradius und R_D Durchlassradius ist. Die Größe F eignet sich besser zur Darstellung der Approximationsgüte, als das Verhältnis der Radien, da sie zwischen 0 und 1 liegt, wenn das Verhältnis der Radien zwischen

$$1 \leq \frac{R_S}{R_D} \leq \sqrt{2} \quad (4.3.4)$$

liegt. Das Verhältnis F hat den Wert 0, wenn das Filter ideal kreissymmetrisch ist und es keinen Übergangsbereich gibt.

Der Wert 1 ergibt sich für ein Filter mit einem quadratischen Verlauf der Trennlinien zwischen Durchgangs- und Sperrbereich.

Die Angabe von F erfolgt immer für die optimale Wahl der Trennfrequenzen der einzelnen Teilfilter. Für den Fall von runden Vielecken ist dieser Wert immer numerisch ermittelt. Bei den meisten Werten wurde dazu das Programm [44] verwendet.* Für den Fall von Vielecken mit geraden Begrenzungslinien ergibt sich die maximale Abweichung bei optimaler Wahl der Trennfrequenzen im Segment mit dem größten Winkel (Bild 4.14) mit

$$R_D = R_S \cos \frac{\delta_{\max}}{2} \quad (4.3.5)$$

zu

$$F = \tan^2 \frac{\delta_{\max}}{2} \quad (4.3.6)$$

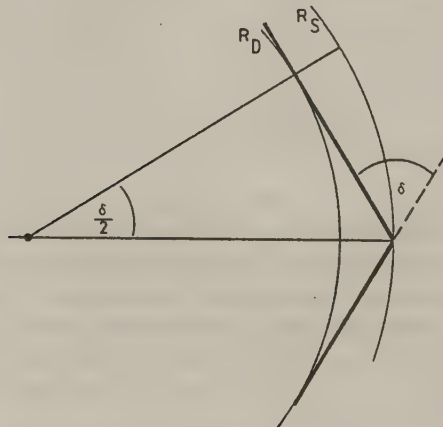


Bild 4.14 Zwei Geradenstücke eines Vieleckes in einem kreissymmetrischem Toleranzschema

* Siehe dazu den Anhang auf der übernächsten Seite

Für ein regelmäßiges Vieleck ist

$$\delta_{\max} = \frac{2\pi}{V} \quad (4.3.7)$$

und damit

$$F = \tan^2 \frac{\pi}{V} \quad (4.3.8)$$

(Dabei ist V die Anzahl der Ecken.)

Um einen Vergleich der einzelnen Filtertypen zu ermöglichen, werden noch zwei Größen angegeben, die den Speicheraufwand betreffen. Dazu wird idealisierend davon ausgegangen, daß alle Teilfilter aus eindimensionalen Filtern gleicher Ordnung abgeleitet werden. Diese Vergleichsgrößen haben immer dann eine große Aussagekraft, wenn durch die Trennlinien der idealen Teilfilter ein nahezu oder sogar ganz gleichseitiges Vieleck in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene gebildet wird, und damit den einzelnen Teilfiltern gleiche Bedeutung zukommt. Ausgehend von der Ordnung n (=Anzahl Speicherelemente) des eindimensionalen Filters werden die Gesamtordnungen n_1 und n_2 des Vieleckfilters in den beiden Frequenzvariablen bestimmt. Als Vergleichsgrößen dienen dann die beiden normierten Größen $N_1 = n_1/n$ und $N_2 = n_2/n$ oder falls $N_1 = N_2$ ist die Größe $N = N_1 = N_2$.

Anhang: Numerische Ermittlung des Flächenverhältnisses F

Die Ermittlung des Flächenverhältnisses F und der für die einzelnen Teilfilter optimalen Trennfrequenzen kann für die Transformation (A) folgendermaßen erfolgen:

Aus den Geraden konstanter Dämpfung entsprechend (4.1.5) werden mit Hilfe (2.3.3) und (2.3.4) die Kurven konstanter Dämpfung in der α_1 - α_2 -Ebene berechnet. Diese Kurvenscharen haben für alle Drehwinkel eine einfache Form mit nur einer Biegung (z. B. Bild 4.6 und Bild 4.8). Aus diesen Kurvenscharen werden dann die Kurven bestimmt, die einen Kreis mit dem gewünschten R_D gerade tangieren. Das Innere des durch die Kurven gebildeten Bereiches entspricht bei idealen Tiefpässen dann genau dem Durchlassbereich. Der Sperrradius läßt sich dann bestimmen, indem entlang der entstandenen Grenzkurve der Abstand zum Ursprung ausgerechnet wird. Dabei wird der Verlauf von ψ_1 und ψ_2 wieder durch die Geraden (4.1.5) gegeben. Der Verlauf der Grenzkurve läßt sich daher mit (2.3.3) und (2.3.4) genau bestimmen. Der Sperrradius ist durch den maximalen Abstand gegeben. Tritt das Maximum an einem Schnittpunkt auf, so läßt sich durch Vergleich mit dem Abstand an dem anderen Schnittpunkten des Kurvenstückes entscheiden, ob durch eine andere Wahl des Drehwinkels für die zugehörige Gerade im α_1 - α_2 -Bereich, sich ein günstigeres Flächenverhältnis erzielen läßt. Dies ist möglich, wenn die Abstände der beiden Schnittpunkte unterschiedlich sind.

4.3.1 Viereckfilter

Die einfachste Form der Approximation der Kreissymmetrie ist die Verwendung von zwei separablen Filtern, wie sie in Kapitel 4.2.1 besprochen wurden. Die Trennlinie zwischen Durchgangs- und Sperrbereich ist dann ein Quadrat. Das Verhältnis zwischen den Radien eines umschließenden Kreises und eines eingeschlossenen Kreises beträgt minimal $\sqrt{2}$. Damit ergibt sich $F=1$. Der Speicheraufwand ist $N=1$.

Die zweite Möglichkeit für ein Vieleck bildet die Transformation (A) bei den Werten $c_1=c_2$. Es werden dann die Filter

$$H^{45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_I(\psi_1 + \psi_2) \quad (4.3.9)$$

$$H^{-45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_I(\psi_1 - \psi_2)$$

mit

$$H_I(\psi) \quad (4.3.10)$$

idealer Tiefpass und

$$\psi_v = j \cdot \tan \frac{\omega_v}{2} \quad \omega_v = 1,2 \quad (4.3.11)$$

verwendet (Bild 4.15). Der Speicheraufwand ist durch $N=2$ gekennzeichnet. Es ergibt sich dann das in Bild 4.16 für gedrehte Vierecke eingezeichnete Flächenverhältnis F . In dieser Abbildung ist auf der Abzisse der Grenzradius R_D des Durchlaßbereiches aufgetragen. Der Fall des konstanten Verhältnisses F ist nur für das einfache Viereck und für die Transformation (B) gegeben. Der Wert 1 ist die Begrenzung für die Maxima der Flächenverhältnisse der

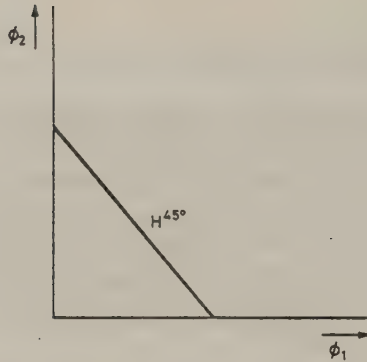


Bild 4.15 Verlauf der Trennlinie zwischen Durchgangs- und Sperrbereich beim Filter (4.3.9) im ersten Quadranten der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene

anderen Verfahren. Im Fall des gedrehten Viereckes liegt das Minimum bei $R_D=0.68$ und beträgt $F=0.057$.

Die Transformation (B) ergibt für $n=m=1$ ein entsprechendes in der α_1 - α_2 -Ebene um 45° gedrehtes Filter. Das Flächenverhältnis ist $F=1$ für alle Durchlaßradien. Wegen des doppelten Aufwandes ($N=2$) gegenüber dem ungedrehten Viereckfilter ist dieses Filter für die Realisierung aber uninteressant.

4.3.2 6-Eck-Filter

Wird folgendes Filter gewählt:

$$H^{12}(z_1, z_2) = H_{I_1}(z_1 \cdot z_2^2) \quad (4.3.12)$$

$$H^{10}(z_1, z_2) = H_{I_2}(z_1)$$

$$H^{-12}(z_1, z_2) = H_{I_1}(z_1^{-1} \cdot z_2^2)$$

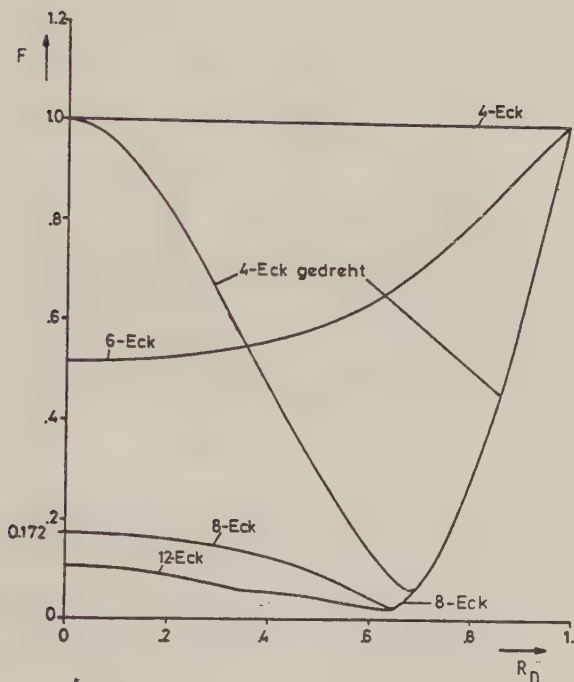


Bild 4.16 Minimales Verhältnis der Flächen des Übergangsbereiches und des Sperrbereiches bei Verwendung von Einzelfiltern, die mit Hilfe der Transformation (A) entstanden sind.

mit

$$H_{I_1}(z) ; H_{I_2}(z) \quad (4.3.13)$$

idealen Tiefpässen, dann ergibt sich bezüglich der 45° Achsen ein unsymmetrisches Filter mit 6 Ecken (Bild 4.17). Es ergibt sich ein maximaler Winkel von

$$\delta = 63.43^\circ \quad (4.3.14)$$

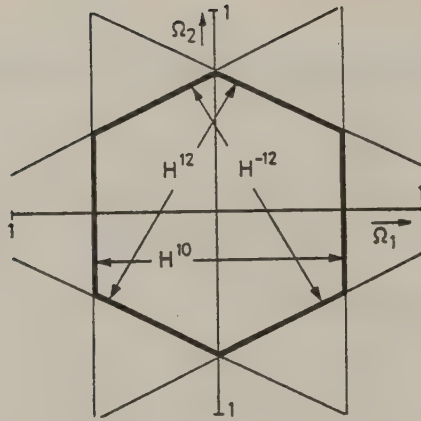


Bild 4.17 Das Filter (4.3.12) in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene.

Die dicke Linie ist die Trennlinie zwischen Durchlass- und Sperrbereich. Sie umrandet den Durchschnitt der Durchlassbereiche der Teilfilter $H^{10}(z_1, z_2)$, $H^{12}(z_1, z_2)$ und $H^{-12}(z_1, z_2)$, deren Trennlinien eingezeichnet sind.

und damit aus (4.3.6) $F=0.38$. N_1 und N_2 haben unterschiedliche Werte:

$$N_1 = 3 ; \quad N_2 = 4 \quad (4.3.15)$$

Ein 6-Eck-Filter läßt sich auch mit der Transformation (A) aufbauen (vgl. (4.2.23)):

$$H^{18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I1}(3\psi_1 + \psi_2) \quad (4.3.16)$$

$$H^{-18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I1}(3\psi_1 - \psi_2)$$

$$H^{90^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I2}(\psi_2)$$

und damit

$$N_1 = 2 ; \quad N_2 = 3 \quad (4.3.17)$$

Dieses Filter bildet in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene ein ungleichseitiges 6-Eck. Für Werte $R_D > 0$ ergibt sich daraus in der α_1 - α_2 -Ebene ein "rundes" 6-Eck. Anders als beim Filter (4.3.9) sind aber die Abweichungen vom Vieleck so, daß der Wert von F höher als beim geraden Vieleck ist. Beim geraden 6-Eck mit diesen Eckwinkeln ergibt sich $F=0.52$. Damit ist dieses Filter bezüglich F immer ungünstiger als das Filter (4.3.12).

4.3.3 Achteckfilter

Diese Filter sind besonders einfach mit der Transformation (B) zu realisieren. Es werden dazu folgende Einzelfilter benötigt:

$$H^{01}(z_1, z_2) = H_{I_1}(z_2) \quad (4.3.18)$$

$$H^{11}(z_1, z_2) = H_{I_2}(z_1 \cdot z_2)$$

$$H^{10}(z_1, z_2) = H_{I_1}(z_1)$$

$$H^{1-1}(z_1, z_2) = H_{I_2}(z_1 \cdot z_2^{-1})$$

Es ist dann $N=3$. Dieses Filter erzeugt in der α_1 - α_2 -Ebene ein reguläres 8-Eck (Bild 4.18). Es ist daher

$$F = \tan^2 \frac{2\pi}{8} = 0.172 \quad (4.3.19)$$

Wie für alle Filter mit der Transformation (B) gilt dieses Ergebnis für alle Werte des Durchlassradius R_D . Da durch

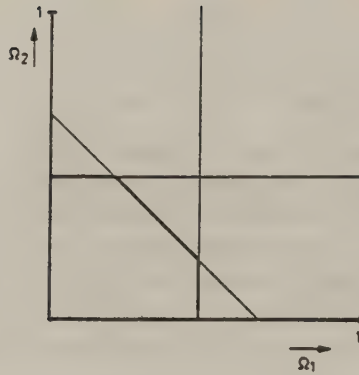


Bild 4.18 Das Achteckfilter (4.3.18) in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene

die Transformation die Durchlaß- und Sperrbereiche des Filters den Nyquistbereich nicht mehr auf einfache Weise ausfüllen, darf R_D nicht beliebig groß werden. Andernfalls können Aliaseffekte auftreten. In [38] ist der maximale Wert mit

$$R_D = \frac{1}{1+1/\sqrt{2}} = 0.59 \quad (4.3.20)$$

angegeben.

Wird die Transformation (A) angewendet, so gibt es 2 Möglichkeiten der Realisierung eines 8-Eck-Filters. Zum einen ist dies das Filter (Bild 4.19)

$$H^{0^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_1) \quad (4.3.21)$$

$$H^{45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 + \psi_2)$$

$$H^{90^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_2)$$

$$H^{-45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 - \psi_2)$$

Wie bei dem vorherigen Filter (4.3.18) ist $N=3$. Das Flächenverhältnis F liegt für R_D unterhalb 0.75 immer

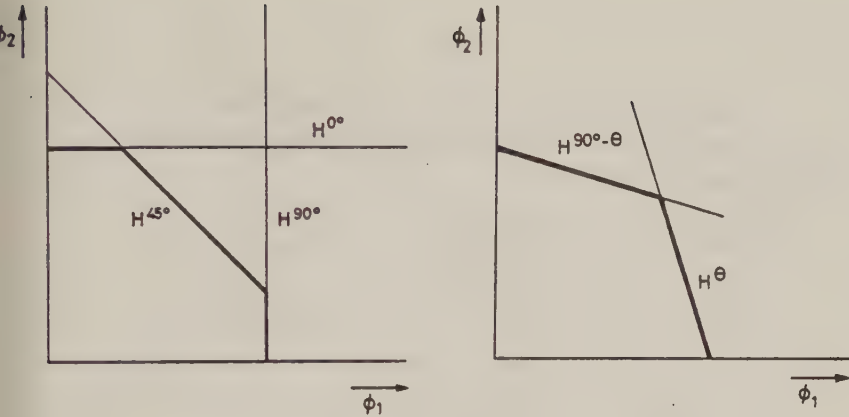


Bild 4.19 Zwei Möglichkeiten zur Realisierung eines
Achteckfilters mit der Transformation (A):
links (4.3.21) und rechts (4.3.22)

unterhalb des Wertes 0.172 (Bild 4.16). Das Filter ist also bezüglich des Flächenverhältnisses F immer günstiger als das 8-Eck-Filter (4.3.18). Die Anzahl der Berechnungen ist wegen der zusätzlich notwendigen Adaptoren mit je 4 Additionen höher, während sich für die Bewertung des Speicheraufwandes die gleichen Größen ergeben.

Wird das 8-Eck-Filter (4.3.21) mit dem 4-Eck-Filter (4.3.9) verglichen, so ergibt sich für $R_D > 0.69$ kein kleineres Flächenverhältnis als für das 4-Eck-Filter. Dies ist damit zu erklären, daß das 8-Eck aus der α_1 - α_2 -Ebene in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene verformt ist. Deshalb muß für $R_D > 0$ bei einem optimalen Filter das 45° -Teilfilter weiter innen als bei einem regulären 8-Eck-Filter liegen. Für $R_D = 0.69$ ist das 45° -Filter dann soweit in das 8-Eck gewandert, daß die Grenzlinien des 0° - und des 90° -Filters ganz im Sperrbereich des 45° -Filters liegen. Das 8-Eck ist dann auf ein 4-Eck reduziert worden. Das Filter entspricht dann dem gedrehten 4-Eck-Filter (4.3.9).

Die zweite Möglichkeit zur Realisierung eines 8-Eckfilters mit der Transformation (A) ist durch folgendes Filter gegeben (Bild 4.19):

$$H^{18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(3\psi_1 + \psi_2) \quad (4.3.22)$$

$$H^{72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 + 3\psi_2)$$

$$H^{-18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(3\psi_1 - \psi_2)$$

$$H^{-72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 - 3\psi_2)$$

Jetzt ist $N=4$. In [40] wurde das Flächenverhältnis F für diese Filterstruktur untersucht, wenn der Winkel nicht 18° bzw. 72° gewählt wird, sondern so optimiert wird, daß F minimal wird. Die Werte von F lagen dann immer noch oberhalb der Werte des Filters (4.3.21). Die Werte des nicht optimierten Filters (4.3.22) müssen noch ungünstiger liegen. Damit ergibt sich für das Filter (4.3.22) trotz des höheren Speicheraufwandes kein gegenüber dem 8-Eck-Filter (4.3.21) günstigeres Flächenverhältnis. Das Filter (4.3.22) ist damit in keinem Anwendungsfall interessant.

4.3.4 Zwölfeckfilter

Für ein gleichseitiges 12-Eck ergibt sich aus (4.3.7) $F=0.0717$. Mit keiner der angegebenen multipliziererfrei zu realisierenden Transformationen läßt sich ein ideales 12-Eck erzeugen.

Bei Verwendung von Einzelfiltern mit der Transformation (B) ergibt sich ein Zwölfeck mit folgenden Filtern:

$$H^{10}(z_1, z_2) = H_{I_1}(z_1) \quad (4.3.23)$$

$$H^{12}(z_1, z_2) = H_{I_2}(z_1 \cdot z_2^2)$$

$$H^{21}(z_1, z_2) = H_{I_2}(z_1^2 \cdot z_2)$$

$$H^{01}(z_1, z_2) = H_{I_1}(z_2)$$

$$H^{1-2}(z_1, z_2) = H_{I_2}(z_1 \cdot z_2^{-2})$$

$$H^{2-1}(z_1, z_2) = H_{I_2}(z_1^2 \cdot z_2^{-1})$$

Es ist dann $N=7$. Der maximale Winkel ist

$$\delta_{\max} = 2 \cdot \arctan \frac{1}{3} = 36.86^\circ \quad (4.3.24)$$

und damit $F = 1/9 = 0.112$.

Für die Transformation (A) ergibt sich ein Zwölfeck aus (Bild 4.20):

$$H^{18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(3\psi_1 + \psi_2) \quad (4.3.25)$$

$$H^{45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_1 + \psi_2)$$

$$H^{72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 + 3\psi_2)$$

$$H^{-18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(3\psi_1 - \psi_2)$$

$$H^{-45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_1 - \psi_2)$$

$$H^{-72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 - 3\psi_2)$$

Dann ist $N=6$. Der Verlauf des Flächenverhältnisses F ist in Bild 4.16 eingezeichnet. Anders als beim Filter (4.3.21), das von einem 8-Eck in ein 4-Eck-Filter übergeht, wenn R_D größere Werte annimmt, geht das 12-Eck-Filter (4.3.25) nicht in das 8-Eck-Filter (4.3.21) über, wenn bei steigendem R_D immer die optimalen Grenzfrequenzen für die Teilfilter

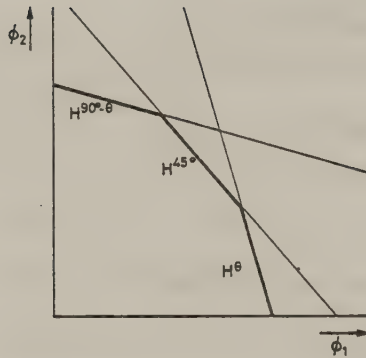


Bild 4.20 Das Zwölfeckfilter (4.3.25) in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene

gewählt werden. Das Filter ist aber für $R_D > 0.66$ fast identisch mit dem 8-Eck-Filter (4.3.21), so daß dieses wegen des geringeren Aufwandes dann vorzuziehen ist. Für $R_D > 0.69$ geht beim Optimierungsprozess dann aber auch das Zwölfeckfilter (4.3.25) in das 4-Eck-Filter (4.3.9) über, das ja einen erheblich geringeren Aufwand benötigt.

Vergleicht man das Flächenverhältnis der 12-Eck-Filter mit beiden Transformationen, so zeigt sich, daß das Filter, das aus Einzelfiltern mit der Transformation (A) entstanden ist, immer günstiger ist. Der Grenzwert für $R_D=0$ ist bei beiden Filtern identisch und zwar $F=1/9$. Dies ergibt sich aus dem identischen (siehe dazu Kapitel 4.2.3)

$$\delta_{\max} = 2 \cdot \arctan \frac{1}{3} = 36.86^\circ \quad (4.3.26)$$

Die Lage der Ecken ist bei beiden Filtern unterschiedlich. Da der Aufwand für die Speicher beim Filter (4.3.25) geringer als beim Filter (4.3.23) ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden, ob dieser Vorteil durch den etwas

höheren Rechenaufwand für die Transformation (A) nicht aufgewogen wird.

Eine zweite Möglichkeit zur Realisierung eines Zwölfeckfilters mit Einzelfiltern, die aus eindimensionalen Filtern mit Hilfe der Transformation (A) entstanden sind, ist durch die Kaskadierung folgender Filter gegeben:

$$H^{90^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_2) \quad (4.3.27)$$

$$H^{72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 + 3\psi_2)$$

$$H^{18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(3\psi_1 + \psi_2)$$

$$H^{0^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_1)$$

$$H^{-18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(3\psi_1 - \psi_2)$$

$$H^{-72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 - 3\psi_2)$$

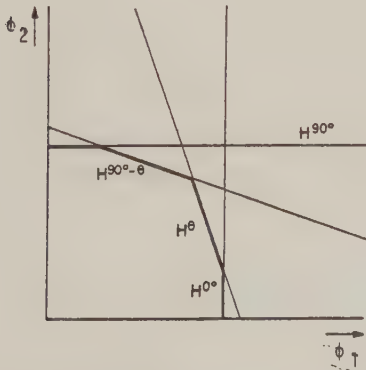


Bild 4.21 Das Zwölfeckfilter (4.3.27) in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene

Das Filter ist in Bild 4.21 gezeichnet. Durch die Vorgabe von $\theta = 18.43^\circ$ ergeben sich sehr hohe Werte für F . Für $R_D = 0$ ist der Grenzwert $F = 0.25$. Für $R_D > 0$ liegen die Werte noch ungünstiger. Somit ist das Zwölfeckfilter (4.3.27) sogar ungünstiger als die interessanten Achteckfilter. Da das Filter mit $N=5$ aber weniger Speicherbedarf als die anderen Zwölfeckfilter hat, wird in Kapitel 4.6 auf dieses Filter noch einmal eingegangen, wenn die Wahl des Winkels freigestellt wird.

4.3.5 16-Eck-Filter

Das regelmäßige 16-Eck-Filter hat gemäß (4.3.7) ein

$$F = \tan^2 \frac{\pi}{16} = 0.040 \quad (4.3.28).$$

Mit der Transformation (B) läßt sich folgendes 16-Eck-Filter aufbauen:

$$\begin{aligned} H^{10}(z_1, z_2) &= H_{I_1}(z_1) \\ H^{12}(z_1, z_2) &= H_{I_2}(z_1 \cdot z_2^2) \\ H^{11}(z_1, z_2) &= H_{I_3}(z_1 \cdot z_2) \\ H^{21}(z_1, z_2) &= H_{I_2}(z_1^2 \cdot z_2) \\ H^{01}(z_1, z_2) &= H_{I_1}(z_2) \\ H^{1-2}(z_1, z_2) &= H_{I_2}(z_1 \cdot z_2^{-2}) \\ H^{1-1}(z_1, z_2) &= H_{I_3}(z_1 \cdot z_2^{-1}) \\ H^{2-1}(z_1, z_2) &= H_{I_2}(z_1^2 \cdot z_2^{-1}) \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Dabei ergibt sich $N=10$. Für das Flächenverhältnis ergibt sich mit

$$\delta_{\max} = \arctan \frac{1}{2} \approx 26^\circ \quad (4.3.30)$$

dann

$$F = 0.056 \quad (4.3.31).$$

Für die Transformation (A) ist mit

$$H^{0^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_1) \quad (4.3.32)$$

$$H^{18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 + 3\psi_2)$$

$$H^{45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_3}(\psi_1 + \psi_2)$$

$$H^{72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(3\psi_1 + \psi_2)$$

$$H^{90^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_1}(\psi_2)$$

$$H^{-18^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(\psi_1 - 3\psi_2)$$

$$H^{-45^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_3}(\psi_1 - \psi_2)$$

$$H^{-72^\circ}(\psi_1, \psi_2) = H_{I_2}(3\psi_1 - \psi_2)$$

ein 16-Eck-Filter aufzubauen (Bild 4.22). Dann ist $N=7$. Der Wert für F liegt unterhalb des Wertes für das Filter (4.3.29). Für Werte $R_D > 0.35$ ist das Filter nicht günstiger als das 12-Eck-Filter (4.3.25).

Ähnlich wie bei den 12-Eck-Filtern ist das Filter aus Einzelfiltern mit der Transformation (A) bezüglich des Flächenverhältnisses und des Speicheraufwandes günstiger, benötigt aber eventuell einen höheren Rechenaufwand.

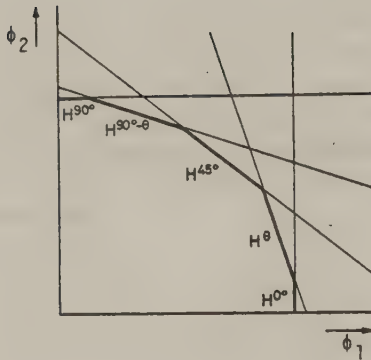


Bild 4.22 Das 16-Eck-Filter (4.3.32) in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene
 4.4 Zusammenstellung der wichtigsten Filter

Mit dem 16-Eck-Filter sind nun alle sinnvollen Möglichkeiten, die sich aus der Transformation (A) bei multipliziererfreier Realisierung der Drehungen ergeben, erschöpft. Nicht sinnvolle Möglichkeiten sind noch dadurch gegeben, daß auch beliebig kleine Winkel ($\theta < 8.2^\circ$) mit der Transformation (A) multipliziererfrei realisiert werden können. Durch zusätzliche Verwendung solcher Filter kann die Kreisform in bestimmten Bereichen besser angenähert werden, die maximale Abweichung bleibt jedoch unverändert. Die so aufgebauten Vieleckfilter haben daher das gleiche Flächenverhältnis F wie das 16-Eckfilter, bzw. die sich aus den Optimierungen daraus ergebenden Vielecke mit einer Eckenzahl kleiner als 16.

Für das 12-Eck-Filter und das 16-Eck-Filter nach dem Verfahren (B) wird die Transformation (4.2.14) benötigt. Diese läßt ohne eine Erhöhung der Betriebsrate (z. B. durch Interpolation von Zwischenwerten) nur sehr kleine Durchlassradien zu. Wie in den beiden letzten Kapiteln erläutert, sind das 12- und 16- Eck-Filter

mit der Transformation (B) auch bezüglich des Speicherbedarfs ungünstig.

In diesem Kapitel sind die Filter, die sich bei der Betrachtung der möglichen Vieleckfilter als günstig erwiesen haben, zusammengestellt. Dabei ergeben sich hauptsächlich Filter, die aus Einzelfilter mit Hilfe der Transformation (A) entstanden sind. Da diese Filter nicht in allen Bereichen mit Erhöhung der Anzahl der Ecken bessere Flächenverhältnisse liefern, ist als besondere Kenngröße in der Tabelle der maximale Wert von R_D angegeben, bis zu dem eine Anwendung der Filter sinnvoll ist. Dieser Wert von R_D wird als R_{max} bezeichnet. Zur weiteren Kennzeichnung der einzelnen Filter ist noch der Wert von F bei $R_D=0$ -als F_0 bezeichnet- und der minimale Wert von F -als F_{min} bezeichnet- angegeben.

Tabelle 1

Filter aus Einzelfiltern mit Verfahren (A)

Verfahren	Bild	N	R_{max}	F_0	F_{min}
16-Eck (4.3.32)	4.22	7	0.35	0.06	---*
12-Eck (4.3.25)	4.20	5	0.66	0.12	0.016
8-Eck (4.3.21)	4.19	3	0.69	0.17	0.024
4-Eck (4.3.9)	4.15	2	1	1	0.057

(* nicht berechnet)

Filter aus Einzelfiltern mit Verfahren (B)

8-Eck (4.3.18)	4.18	3	$R_D < 0.59$	0.17	0.17
----------------	------	---	--------------	------	------

Da immer $N_1=N_2$ gilt, ist nur die Größe N angegeben. Beim letzten Filter mit dem Verfahren (B) ist anstelle von $R_{\max}$ das maximal zulässige R_D angegeben. F_0 und $F_{\min}$ stimmen dabei wegen $F=\text{konst.}$ natürlich überein.

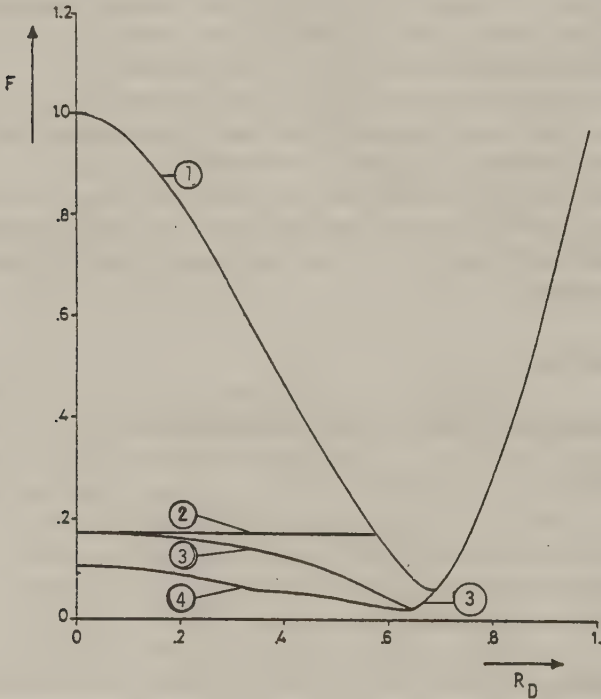


Bild 4.23 Das Flächenverhältnis für die wichtigsten Filter

- ① Das Viereckfilter 4.3.9
- ② Das Achteckfilter 4.3.18
- ③ Das Achteckfilter 4.3.21
- ④ Das Zwölfeckfilter 4.3.25

4.5 Benutzung der Ergebnisse für nicht ideale Einzelfilter

Es sei ein Toleranzschema entsprechend Bild 4.1 durch die Werte R_D , R_S , $A_{\max}$ und $A_{\min}$ gegeben. Wird nun aus den letzten Kapiteln ein Vieleckfilter mit einem Flächenverhältnis F gewählt, so daß

$$F < \frac{R_S^2}{R_D^2} - 1 \quad (4.5.1)$$

gilt, so läßt sich immer das Filter mit nicht idealen Einzelfiltern realisieren. Es seien dazu folgende Anforderungen an die Teilfilter gestellt:

$$\textcircled{1} \quad \sum_v A_{\max_v} \leq A_{\max} \quad (4.5.2)$$

(Wobei $A_{\max_v}$ die maximale Durchlaßdämpfung eines Teilfilters ist.)

$$\textcircled{2} \quad A_v(\omega_1, \omega_2) \geq A_{\min} \text{ für } \omega_1^2 + \omega_2^2 \geq R_S^2 \quad (4.5.3)$$

Die Forderung (4.5.2) läßt sich immer erfüllen, wenn genügend dämpfungsarme Teilfilter gewählt werden. Die Forderung (4.5.3) läßt sich aber auch erfüllen, da durch das Ungleichheitszeichen in der Bedingung (4.5.1) immer gewährleistet ist, daß jedem Teilfilter ein Übergangsbereich zur Verfügung steht.

Die angegebenen Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig. Im Durchlaßbereich wird die maximale Dämpfung nur für den Fall angenommen, daß alle Dämpfungsmaxima der Teilfilter zumindest an einem Punkt in der ω_1 - ω_2 -Ebene innerhalb des Durchlasskreises zusammenfallen. Im Sperrbereich können sich die Dämpfungen der einzelnen Teilfilter addieren, so daß eventuell eine geringere Dämpfungsanforderung an die Teilfilter gestellt

werden kann.

Der Filterentwurf kann daher auf folgende Art erfolgen: Die hinreichenden Anforderungen an die einzelnen Teilfilter werden aus (4.5.1), (4.5.2) und (4.5.3) berechnet. Aus einem Filterkatalog oder mit Hilfe einer numerischen Berechnungsprozedur werden dann geeignete Filter für die einzelnen Teilfilter bestimmt. Für die so erhaltenen Filter wird der Dämpfungsverlauf in der gesamten Ω_1 - Ω_2 -Ebene berechnet. Zeigt das Filter eine starke Übererfüllung des Toleranzschemas, so kann eine weitere Berechnung mit Filtern erfolgen, deren Grad um eins reduziert wurde.

Bei den exemplarischen Berechnungen in [40] zeigte sich allerdings, daß die aus den hinreichenden Bedingungen ermittelten Grade der Teilfilter bei Filtern, die wegen der Anforderungen mit mehr als 4 Ecken realisiert werden mußten, nicht mehr unterboten werden konnten. Insbesondere im Durchlassbereich war keine Übererfüllung zu verzeichnen. Die Iteration kann in den Fällen, in denen im Durchlassbereich $A_{\max}$ immer angenommen wird, durch Variation der Sperrdämpfung der einzelnen Teilfilter erfolgen, so daß eine einfache Suchvorschrift für das Iterationsverfahren gegeben werden kann.

Eine Verfeinerung des Vorgehens kann dadurch vorgenommen werden, daß für die Einzelfilter die Toleranzanforderungen in mehreren Stufen festgelegt werden. Dies ist möglich, weil in verschiedenen Bereichen eines Vieleckfilters mehrere Filter zur Dämpfung beitragen. Damit können in diesen Bereichen die Dämpfungsanforderungen reduziert werden. Einzelfilter für solche stufenförmige Toleranzschemen können mit numerischen Verfahren [14,23] bestimmt werden.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in einigen Bereichen mehrere Teilfilter zur Sperrdämpfung beitragen, sind in [38,45] für das 8-Eck-Filter nach dem Verfahren (B) Bedingungen an die Teilfilter hergeleitet worden, um ein vorgegebenes Toleranzschema zu erfüllen. Diese Bedingungen dienen dann als Werte für ein numerisches Verfahren, so daß eine automatische Filterberechnung möglich ist. Dies gilt allerdings nur für Filter mit $F > 0.17$.

Für das Verfahren (A) sind die hinreichenden Bedingungen wegen der durch die Transformation erzeugten Verzerrungen nicht in ähnlich einfacher Weise herzuleiten. Im Rahmen der Arbeit [41] wurde für ein fest vorgegebenes Kreistoleranzschema für die Einzelfilter ein stufenförmiges Toleranzschema bestimmt, um damit ein Achteckfilter nach dem Verfahren (A) aufzubauen [46,47]. In dem Beispiel konnte der Grad der Einzelfilter gegenüber dem Grad der aus dem Katalog gewählten Einzelfiltern reduziert werden.

Im Durchlassbereich können die Forderungen an die Einzelfilter nur reduziert werden, wenn vermieden wird, daß die Dämpfungsmaxima der Teilfilter zusammenfallen. Da die Dämpfungsmaxima von zwei Teilfiltern auf sich schneidenden Geraden liegen, fallen zwei Dämpfungsmaxima immer zusammen. Die wenigen Möglichkeiten die es gibt, weitere Dämpfungsmaxima ungefähr in die Mitte der Punkte, an denen zwei Teilfilter ein Dämpfungsmaximum haben, und damit an ein relatives Dämpfungsminimum zu legen, stellen sehr scharfe Nebenbedingungen an den Verlauf der Dämpfung im Durchlassbereich dar. Diese können in übliche kontinuierliche Verfahren zur Approximation der Einzelfilter nicht einbezogen werden. Vielmehr ist eine voneinander abhängige Approximation der Einzelfilter notwendig. Der Versatz der einzelnen Dämpfungsmaxima könnte in numerischen Verfahren, die mit Absuchen der möglichen Binärkombinationen arbeiten, verwendet werden. Bei versetzter Lage der Dämpfungsmaxima werden die geringeren Anforderungen

bezüglich der maximalen Dämpfung durch Anforderungen an die Lage der Pole ersetzt. Es liegen keine Erfahrungen über die Wirksamkeit dieses Vorgehens vor.

4.6 Filter aus Teilfiltern mit beliebigen Drehwinkeln

Bisher wurde bei der Transformation (A) immer der Fall einer multipliziererfreien Realisierung der Drehwinkel der Teilfilter betrachtet. Bei der Realisierung muß nicht nur der Aufwand, den die Transformationen verursachen, sondern auch der restliche Aufwand des Filters betrachtet werden. WDF lassen sich wegen ihrer geringen Koeffizientenempfindlichkeit vielfach mit sehr kurzen Multipliziererkoeffizienten [13,14] aufbauen. Um bei der dazu notwendigen Optimierung möglichst viele Freiheitsgrade zu haben und damit zu besonders günstigen Lösungen gelangen zu können, ist auch eine Variation der Struktur und die Einbeziehung der durch die Drehungen der Einzelfilter vorgegebenen Koeffizienten vorzunehmen. Es interessiert die Frage, wie weit die durch die multipliziererfreien Drehungen erhaltenen Lösungen von den optimalen Lösungen entfernt sind, die mit gleicher Anzahl von Speichern realisiert werden können.

Die bei den multipliziererfreien Drehungen erhaltenen Werte für das Flächenverhältnis F lassen sich bei den in weiten Bereichen interessanten 4-Eck-Filtern (4.3.9) und 8-Eck-Filtern (4.3.21) auch bei freier Wahl der Drehwinkel nicht mehr unterbieten. Jede Änderung eines Drehwinkels zerstört die Symmetrie dieser Vieleckfilter, und erzeugt an einer Stelle eine größere Abweichung von der Kreissymmetrie.

Das 8-Eck-Filter (4.3.22) läßt sich mit der freien Wahl der Drehwinkel optimieren, bleibt aber immer ungünstiger als das Filter (4.3.21) und ist damit auch in optimierter Form

uninteressant.

Zur Realisierung eines 12-Eck-Filters gibt es die Möglichkeiten (4.3.25) und (4.3.27). Bei freier Wahl der Winkel für die einzelnen Teilfilter läßt sich in der Nähe des Ursprungs für F bei beiden Filtern der Wert für das ideale 12-Eck annähern. Dieser beträgt entsprechend (4.3.7)

$$F=0.0717$$

Für das Filter (4.3.25) ergab sich ein Wert von 0.111, für das Filter (4.3.27) ein Wert von 0.25, jeweils bei multipliziererfreier Realisierung der Drehung.

Zunächst sei ein Filter in Anlehnung an (4.3.25) behandelt, bei dem jedoch der Winkel ϕ (Bild 4.20) frei gewählt werden kann. Zur Annäherung des idealen Zwölfecks in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene muß der Winkel ϕ 15° betragen, gegenüber dem Wert von 18.43° bei der multipliziererfreien Realisierung. Soll die Kreissymmetrie in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene realisiert werden, so steigt mit von Null an steigendem R_D der optimale Wert des Winkels von 15° zu größeren Werten. Bei $R_D=0.35$ (numerisch ermittelt) nimmt der optimale Wert von ϕ den Wert der multipliziererfreien Realisierung an. Für $R_D > 0.35$ steigt der optimale Winkel dann über den Wert von 18.4° an, bis er den Wert von 45° erreicht hat. In diesem Fall ist aus dem 12-Eck ein 4-Eck geworden. Dieser Wert liegt bei $R_D=0.68$. Eine optimale Approximation durch ein 12-Eck ist für größere Werte als $R_D=0.68$ wegen der Konvexität des Durchgangsbereiches in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene nicht mehr möglich.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das modifizierte Filter (4.3.25) mit freier Wahl des Drehwinkels im Bereich $0 \leq R_D \leq 0.35$ nur geringfügig besser als das mit der einfachen Realisierung ist, und im Bereich zwischen $0.35 \leq R_D \leq 0.68$ es sich noch deutlich optimieren läßt,

während es darüber auch nicht besser als das Viereckfilter (4.3.9) sein kann.

Jetzt sei ein 12-Eck-Filter in Anlehnung an (4.3.27) betrachtet, bei dem jedoch der Winkel θ (Bild 4.21 .21) beliebige Werte annehmen darf. Bei der multipliziererfreien Realisierung der Drehung ist $\theta = 18.43^\circ$, während der ideale Wert zur Realisierung eines gleichseitigen 12-Ecks in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene 30° beträgt. Dieser Wert ist in der Nähe im Ursprung dann auch das Optimum zur Realisierung der Kreissymmetrie in der α_1 - α_2 -Ebene. Für steigendes R_D muß der optimale Wert von θ dann bis 45° zunehmen. Daher wird bei der multipliziererfreien Drehung das Optimum nie erreicht. Für den Wert $\theta = 45^\circ$ geht das Filter in ein 8-Eck-Filter entsprechend (4.3.21) über. Während das Filter mit der multipliziererfreien Drehung immer ein $F \geq 0.25$ hatte, läßt sich mit der freien Wahl des Drehwinkels ein Filter aufbauen, daß im Bereich zwischen $0 \leq R_D \leq 0.66$ immer besser als $F=0.0718$ liegt. Die Werte für F sind ähnlich wie die Werte für das Filter (4.3.25) bei freier Winkelwahl, das die Kenngröße $N=6$ für die Bewertung des Speicherbedarfs hat. Das zuletzt besprochene 12-Eck-Filter hat die günstigeren Werte $N=5$.

Ähnliche Verhältnisse wie bei den 12-Eck-Filtern sind beim 16-Eck-Filtern zu verzeichnen. Für ein gleichseitiges 16-Eck ergibt sich ein $F=0.0395$ gegenüber dem Wert von $F_D=0.056$ für das Filter (4.3.32). Im Bereich $0 \leq R_D \leq 0.35$ läßt sich bei freier Wahl der Winkel F verbessern. Darüberhinaus ($R_D > 0.35$) sind mit einem 12-Eck-Filter die gleichen Ergebnisse zu erzielen. Die Wahl des Winkels von $\theta=18.43^\circ$ bei dem Filter (4.3.32) stellt für keinen Wert von R_D ein Optimum dar.

Wird die Wahl des Winkel freigestellt, so lassen sich

Vielecke beliebiger Ordnung mit Hilfe der Transformation (A) in der α_1 - α_2 -Ebene erzeugen. Da mit der Kaskadierung von Einzelfiltern aber nur konvexe Formen angenähert werden können, bleibt das Verfahren auf die Nähe des Ursprungs beschränkt. Nur dort werden Kreislinien aus der α_1 - α_2 -Ebene auf konvexe Linien in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene abgebildet (Bild 4.24). Eine Verbesserung der Approximation in Bereichen von R_D , in denen das 16-Eck-Filter nicht mehr besser als ein 12-Eck-Filter ist, ist daher auch mit Filtern mit mehr als 16 Ecken nicht möglich.

Es läßt sich durch eine fortlaufende Verdoppelung der Abtastfrequenzen der zu approximierende Kreis immer in die Nähe des Ursprungs verschieben und damit durch ein Vieleck beliebiger Eckenzahl approximieren. Die erreichbaren Ergebnisse lassen sich durch (4.3.8) abschätzen. Da die Vielecke runde (konvexe) Begrenzungslinien haben, sind die erreichbaren Ergebnisse etwas besser, als durch die Formel vorgegeben. Dieses Verfahren ist wegen des hohen Realisierungsaufwandes nicht weiter untersucht worden.

Im letzten Kapitel wurde erwähnt, daß alle Vieleckfilter mit bis zu 16-Ecken untersucht worden sind. Verbesserungen von einer Größenordnung lassen sich nur beim 16-Eck-Filter mit freier Wahl der Winkel erreichen. Die anderen Filter stellen mit Ausnahme der 12-Eck-Filter das Optimum dar. Aber auch das 12-Eck-Filter (4.3.25) liegt in der Nähe des Optimums. Die am Anfang von Abschnitt 4 gemachte Einschränkung auf Betrachtung von Filtern mit multipliziererfreier Realisierung der Drehung bedeutet somit keine Einschränkung auf uninteressante Sonderfälle. Wenn von der multipliziererfreien Realisierung der Drehungen bei der Realisierung kein Gebrauch gemacht wird, so lassen sich doch mit ihr die erreichbaren Ergebnisse abschätzen. Die bei multipliziererfreier Drehung erhaltenen Filter können dann als Startwerte für eine Optimierung verwendet werden.

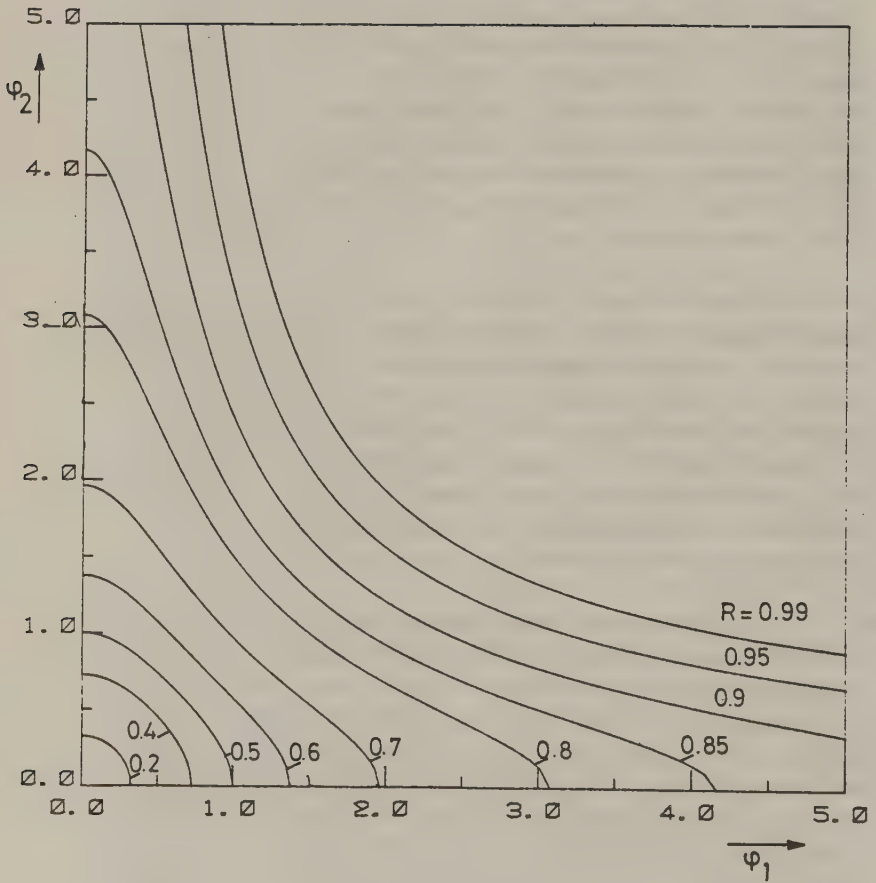


Bild 4.24 Abbildung von Kreislinien der α_1 - α_2 -Ebene
in die ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene [46]

5. Ergänzungen zu dem in 4. besprochenen Verfahren

5.1 Phasenkompensierte Filter (Null-Phasen Filter)

In Abschnitt 4 wurden Tiefpässe betrachtet, die durch Kaskadierung von Teilfiltern entstanden sind. Da für die Teilfilter rekursive Filter ohne Phasenentzerrung verwendet wurden, wird auch (bis auf Sonderfälle) die Phase des Gesamtfilters nicht linear sein.

Bei der Bildverarbeitung sind aber Filter notwendig, die eine zumindest näherungsweise lineare Phase haben. Dies ist notwendig, weil sich Signale verschieden hoher Frequenzen nicht im Bild verschieben dürfen. Eine starke Abweichung von der linearen Phase würde z. B. dazu führen, daß sich die Konturen gegenüber den flächigen Bildinhalten verschieben würden.

Mit den im letzten Abschnitt besprochenen Filtern lassen sich auf zwei Arten phasenkompensierte Filter aufbauen. Zum einen können für die Einzelfilter selbst phasenkompensierte Filter verwendet werden. Dieses Vorgehen entspricht der üblichen Phasenentzerrung in der Nachrichtentechnik. Die andere Möglichkeit macht davon Gebrauch, daß die Bildsignale bezüglich ihrer Ausdehnung beschränkt sind. Es wird die Verarbeitung dazu in zwei weiteren Verarbeitungsrichtungen vorgenommen, so daß insgesamt 4 Iterationen notwendig sind. Dabei muß nach jeder Verarbeitungsrichtung das ganze Feld gespeichert werden. Die Werte des Ausgangssignals werden erst beim Durchlaufen der letzten Verarbeitungsrichtung erhalten. Die Übertragungsfunktion ergibt sich dann analog zu (2.2.18) und (2.2.23) als:

$$H(j\omega_1, j\omega_2) \cdot H(-j\omega_1, j\omega_2) \cdot H(j\omega_1, -j\omega_2) \cdot H(-j\omega_1, -j\omega_2)$$

Durch dieses Vorgehen wird die Übertragungsfunktion sowohl in Bezug auf die Phase als auch in Bezug auf die Dämpfung quadrantensymmetrisch [4]. Die sich ergebende Phase ist

Null, weshalb auch von Null-Phasen-Filterung gesprochen wird. Die oben besprochene Phasenentzerrung hat dagegen eine lineare Phase und führt zu Verschiebungen im Ortsbereich, die sich durch eine entsprechende Bildverschiebung wieder ausgleichen lassen.

Durch die zwei zusätzlichen Filterungen verdoppelt sich sowohl im Sperrbereich als auch im Durchlassbereich die Dämpfung gegenüber dem nicht phasenkompensierten Filter. Die Dämpfungsanforderungen an die Einzelfilter müssen daher geändert werden. Im Durchlassbereich darf dann $A_{\max}$ nur noch halb so groß sein, während im Sperrbereich A_v nur noch die Hälfte betragen muß. Der notwendige Grad der Einzelfilter kann wegen dieser Änderungen für phasenkompensierte Filter und nicht phasenkompensierte Filter unterschiedlich sein.

5.2 Verbesserung des Verfahrens durch die Verwendung von parallelen Filtern

Bei dem im Abschnitt 4 besprochenen Vorgehen wurde das Gesamtfilter durch Kaskadierung von Einzelfiltern erhalten. Im Falle von idealen Einzelfiltern ergibt sich der Durchlassbereich als Durchschnitt der Durchlassbereiche der Einzelfilter (Durchschnitt im Sinne der Mengenlehre). Für das Gesamtfilter bedeutet dies aber, daß die in der Drehebene gebildeten Linien konstanter Dämpfung konvexe Kurvenformen haben. Auch der Kreisbogen hat eine konvexe Kurvenform. Für Filter nach dem Verfahren (B) wird die Drehung in der α_1 - α_2 -Ebene ausgeführt. In dieser Ebene liegt auch das kreisförmige Toleranzschema. Somit läßt sich für diese Filter mit Erhöhung der Anzahl der Ecken die Kreissymmetrie beliebig genau approximieren. Dies war bei Filtern nach dem Verfahren (A) nicht der Fall. Die Drehung erfolgt bei diesen Filtern in der ϕ_1 - ϕ_2 -Ebene. Die dorthin transformierten Kreisbögen der α_1 - α_2 -Ebene haben nur in der

Nähe des Ursprungs eine rein konvexe Form (Bild 4.24). In den weiter vom Ursprung entfernten Bereichen zeigen sie sowohl konvexe als auch konkave Formen. In diesen Bereichen war auch mit Erhöhung der Anzahl Teilfilter keine beliebig genaue Approximation der Kreissymmetrie möglich. Allerdings lassen sich in diesen Bereichen auch mit wenig Ecken sehr gute Ergebnisse erzielen. In einem günstigen Bereich, der wegen des hohen R_D eine Abtastung mit relativ niedriger Rate zuläßt, ist mit dem Viereckfilter (4.3.9) eine genauere Approximation der Kreissymmetrie möglich, als dies ein gleichseitiges Zwölfeck ermöglicht. Soll eine bessere Approximation der Kreissymmetrie vorgenommen werden, so kann dies durch die gemeinsame Verwendung von kaskadierten und parallelen Filtern erfolgen. Bei den parallelen Filtern (Bild 5.1) ergibt sich -im Falle idealer Einzelfilter- der Durchlassbereich als Vereinigung der Durchlassbereich der Teilfilter. Die entstehende Form der Übergangslinie zwischen

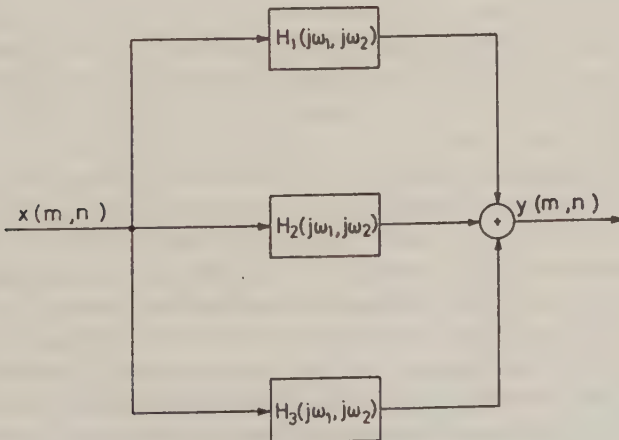


Bild 5.1 Ein 2-D-Filter aus 3 parallelen Teilfiltern

Sperr- und Durchlassbereich kann dann auch konkav sein. Für ein 8-Eck-Filter entsprechend (4.3.22) wurden zur Realisierung zwei parallele Teilfilter verwendet und damit ein niedrigeres F im Bereich $R_D > 0.69$ erreicht. Das Gesamtfilter ergibt sich in diesem Fall wieder durch Kaskadierung des Filters, das im ersten und dritten Quadranten die Kreissymmetrie annähert, und des um 90° gedrehten Filters für den zweiten und vierten Quadranten (Bild 4.4).

Sollen mit parallelen und kaskadierten Filtern phasenkompensierte Filter aufgebaut werden, so muß die Null-Phasenkompensation vor einem Zusammenschalten der verschiedenen Stufen erfolgen. Die Null-Phasenschaltung für die parallelen Filter ist in Kapitel 5.3 angegeben.

5.3 Hochpassfilter

Eine weitere Verwendung von parallelen Filtern ergibt sich zur Realisierung von Hochpassfiltern. Ein kreisförmiges Toleranzschema für einen Hochpass sieht wie das Toleranzschema Bild 4.1 aus, indem aber Sperr- und Durchlassbereich vertauscht sind. Um die Ergebnisse aus dem Abschnitt 4 verwenden zu können, muß weiter das Flächenverhältnis zwischen dem inneren Kreis und dem mittleren Kreisring verwendet werden. Daher ist F im Falle von Hochpässen durch das Verhältnis der Flächen von Übergangsbereich zu Sperrbereich zu wählen und dieses in Abhängigkeit des Sperrradius R_D' zu betrachten. Zunächst seien dazu ideale Einzelfilter betrachtet. Während bei den Filtern in Kaskadenschaltung der Durchlassbereich durch den allen Teilfiltern gemeinsamen Durchlassbereich gebildet wird, ist bei den Filtern in Parallelschaltung immer ein Durchlassbereich gegeben, wenn nur eines der Teilfilter

einen Durchlassbereich hat. Für den Sperrbereich gilt dagegen genau das Umgekehrte: die Kaskadenschaltung erzeugt einen Sperrbereich, wenn nur eines der Teilfilter einen Sperrbereich hat, die Parallelschaltung hat nur dort Sperrbereich, wo alle Teilfilter Sperrbereiche haben. Werden für die Einzelfilter Hochpässe gewählt und diese in Parallelschaltung betrieben, so kommt es gegenüber einem Kaskadenfilter mit Tiefpässen genau zu einer Vertauschung von Sperr- und Durchlassbereichen. Dabei bleiben auch die Übergangslinien erhalten, wenn die zugehörigen Hoch- und Tiefpässe gleiche Übergangsfrequenzen haben. Durch die geänderte Definition von F ergibt sich für die betrachteten Hochpassfilter für F der gleiche numerische Wert wie dies bei den Tiefpassfiltern der Fall war (Bild 4.23). Sollen die Ergebnisse für nicht ideale Filter angewandt werden, so lassen sich wieder Anforderungen an die Einzelfilter aus den Größen $A_{\max}$ und $A_{\min}$ bestimmen. Die Null-Phasenkompensation erfolgt durch Vertauschen der Iterationsrichtungen. Dabei ergibt sich die resultierende Übertragungsfunktion als

$$H(j\omega_1, j\omega_2) + H(-j\omega_1, j\omega_2) + H(j\omega_1, -j\omega_2) + H(-j\omega_1, -j\omega_2)$$

Bei Filtern mit Null-Phasenkompensation ergibt sich eine weitere Möglichkeit Hochpassfilter zu erhalten. Da durch die Null-Phasenkompensation Eingangs- und Ausgangssignal im gesamten Frequenzbereich in Phase sind, ist bei Filtern, deren Übertragungsfunktion im Durchlaßbereich den Wert 1 annähert, die Differenz zwischen dem Tiefpass-gefilterten Signal und dem Eingangssignal ein Hochpass-gefiltertes Signal. Bei Wellendigitalfiltern wird im Durchlaßbereich der Betrag der Übertragungsfunktion an 1 angenähert, so daß ein Hochpassfilter ohne eine zusätzliche Multiplikation sondern nur mit einer Subtraktion aus

einem Tiefpassfilter gebildet werden kann. Der Mehraufwand von einer Subtraktion ist gering gegenüber dem Rechenaufwand.

Wellendigitalfilter können ohne Mehraufwand als Weichenfilter verwendet werden [48,49]. Bei geeigneter Wahl der Übertragungsfunktion steht damit sowohl ein Tiefpassfilter, als auch ein Hochpassfilter zur Verfügung. Diese Tatsache gilt auch für mehrdimensionale WDF. Bei den angegebenen Verfahren zur Approximation der Kreissymmetrie war für Hochpassfilter die Parallelschaltung, für Tiefpassfilter die Kaskadierung von Einzelfiltern notwendig. Eine gleichzeitige Hochpass- und Tiefpassfilterung aufgrund der Weicheneigenschaft der WDF ist daher nicht mehr möglich. Gegebenenfalls können aber die gleichen Einzelfilter zur Berechnung des Hochpass-gefilterten und des Tiefpass-gefilterten Signals verwendet werden. Dabei kann die erste Teilfilterung für den Hochpass und den Tiefpass gemeinsam verwendet werden.

Die Realisierung von Bandpässen ist mit der Kaskadierung von Einzelfiltern vom Bandpasstyp ebenfalls möglich. Die Beurteilung der Approximation der Kreissymmetrie kann dann durch die Abweichung von den beiden Kreisradien erfolgen (Bild 5.2). Diese Abweichungen lassen sich aus dem Flächenverhältnis F mit Hilfe von (4.3.3) berechnen.

Die zweite Möglichkeit zur Realisierung von Bandpässen ist die Kaskadierung von Tiefpass und Hochpass, die beide zur Approximation der Kreissymmetrie aus Teilfiltern bestehen. Die sich ergebenden Radien lassen sich wieder aus den Flächenverhältnissen des Hoch- und Tiefpasses mit (4.3.3) berechnen.

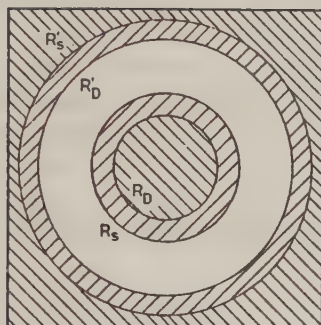


Bild 5.2 Toleranzschema eines Bandpasses mit den sich aus F ergebenden Radien

6. Darstellung der Implementation auf dem Minicomputer

6.1 Das realisierte 2-D-Wellendigitalfilter

Zur Realisierung auf dem Minicomputer wurde als eindimensionales Filter ein Tiefpass 3. Ordnung gewählt (Bild 6.1). Mit Hilfe der Transformation (A) wurden daraus

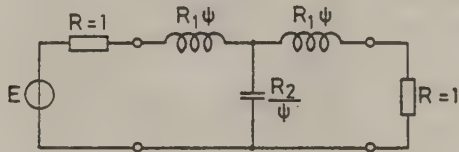


Bild 6.1 Das Referenzfilter, der für die Realisierung verwendeten Einzelfilter

zwei um 45° gedrehte Filter gebildet, die kaskadiert ein Viereckfilter entsprechend (4.3.9) bilden. Für die Bauelemente des Filters wurden 2 verschiedene Sätze verwendet. Die Werte der Bauelemente waren für den einen Satz:

$$R_1=4 \quad \text{und} \quad R_2=1/4$$

und für den anderen Satz:

$$R_1=1.666 \quad \text{und} \quad R_2=0.6$$

Aus diesen Werten ergeben sich die Koeffizientensätze ① und ②. Die Stellenzahl für die Multiplikationen in den Adaptoren wurde nicht durch Optimierung gekürzt, sondern es wurde mit der im Rechner darstellbaren Wortlänge gearbeitet.

Der Koeffizientensatz ① führt zu einem Filter, bei dem die maximale Annäherung an die Kreissymmetrie im Sperrbereich angenommen wird. Beim Koeffizientensatz ② wird die beste Annäherung an die Kreissymmetrie im Durchlassbereich erreicht. Einige Höhenlinien für die beiden Filter sind in Bild 6.2 gezeichnet. Die Bilder sind mit Hilfe von Meßwerten der realisierten Filter gezeichnet worden [50]. In Bild 6.3 ist die numerisch berechnete Übertragungsfunktion in der α_1 - α_2 -Ebene gezeichnet.

Für den Koeffizientensatz ② ergibt sich aus der Auswertung der Meßwerte des realisierten Filters ein Flächenverhältnis $F=0.8$, wenn $A_{\max} = -\ln 0.9$ und $A_{\min} = -\ln 0.1$ gewählt wird. Der Durchlassradius ist dann 0.68, so daß sich aus Bild 4.23 ein minimales $F=0.06$ ergibt. Der große Unterschied zwischen den beiden Werten ist durch den sehr flachen Verlauf des Tiefpasses 3. Ordnung begründet. Das Filter ist trotzdem besser als ein separables Filter, bei dem $F \geq 1$ gilt. Der Koeffizientensatz ① ergibt bei gleichen Dämpfungsanforderungen ein $F > 1$.

Das zweidimensionale Referenzfilter ist in Bild 6.4 gezeichnet. Daraus wurde das in Bild 6.5 gezeichnete 2-D-WDF abgeleitet. Dabei wurde auch ein Adaptor verwendet, für den die Bedingung (2.1.17) nicht erfüllt ist. Dieser Adaptor hat kein reflexionsfreies Tor. Die Gleichungen für diesen Adaptor lassen sich berechnen, indem ein Dreitoradaptor und ein Zweitoradaptor über das reflexionsfreie Tor zusammengeschaltet werden. Durch Eliminierung der Wellengrößen am reflexionsfreien Tor ergeben sich dann die Gleichungen aus (2.1.13) und (2.1.20). Für diesen allgemeinen Dreitoradaptor sind 2 Multiplikationen notwendig. Dies ist in Bild 6.5 durch die Angabe von 2 Koeffizienten markiert. Durch Anordnung der reflexionsfreien Tore bleibt die Bedingung erhalten, daß 2 Dreitore immer

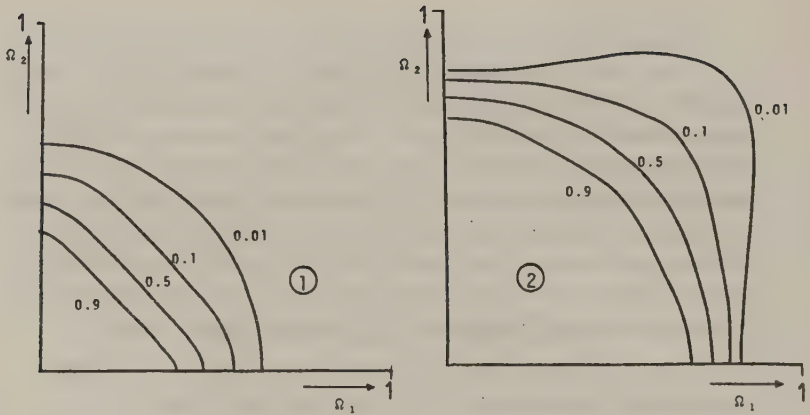


Bild 6.2 Die Höhenlinien $|H(j\omega_1, j\omega_2)| = 0.9; 0.5; 0.1$ und 0.01 für die Koeffizientensätze ① und ②

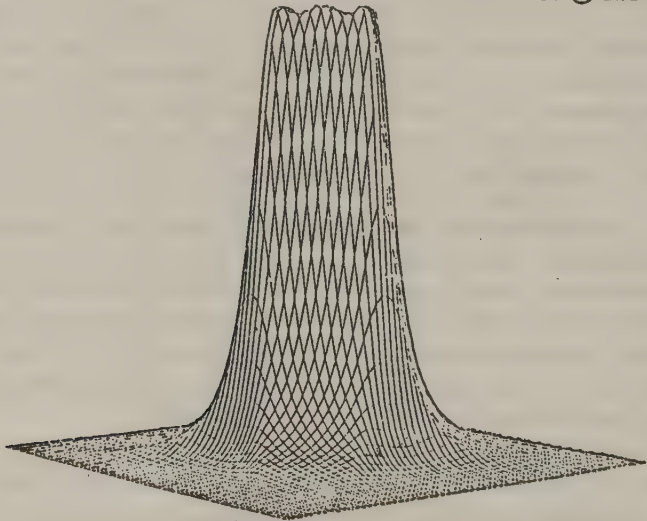


Bild 6.3 Der Betrag der Übertragungsfunktion in der Ω_1 - Ω_2 -Ebene (Koeffizientensatz ①)

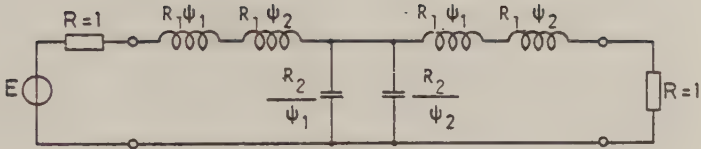


Bild 6.4 Das Referenzfilter für ein Teilfilter des realisierten 2-D-WDF

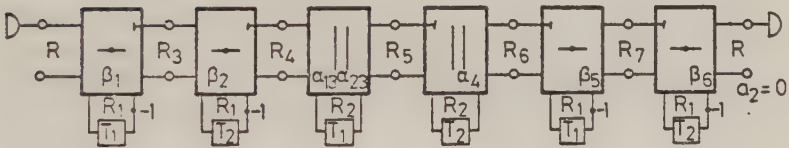


Bild 6.5 Das 2-D-Wellendigitalfilter zur Realisierung eines Tiefpasses

über ein reflexionsfreies Tor zusammengeschaltet sind.

Bei der Programmierung des Filters wurden die Gleichungen für die einzelnen Adaptoren getrennt realisiert. In dem Beispiel aus den Kapiteln 2.4.1 und 2.4.2 waren dagegen die Gleichungen des $n+2$ -Tor-Adaptors bestimmt und zur Programmierung verwendet worden.

Zur Zeit der Programmierung des Filters war das in Abschnitt 4 erläuterte Verfahren zur multipliziererfreien Realisierung der Drehung noch nicht ausgearbeitet. Da der Rechner in der notwendigen Konfiguration nicht mehr zur Verfügung steht, konnte eine entsprechend modifizierte Programmierung nicht mehr vorgenommen werden. Bei solch einer Programmierung könnten die Hälfte aller Multiplikationen eingespart werden. Zudem kann für das 1-D-Filter mit den bekannten Verfahren [23,14] ein günstiger Koeffizientensatz gefunden werden, bei dem die Multiplikationen im 1-D-WDF mit wenigen Additionen ausgeführt werden können.

Die programmierten Filter wurden phasenkompensiert verwendet. Es wurde eine Null-Phasen-Kompensation verwendet. Neben den zwei durch (4.3.9) vorgegebenen Filterungen waren daher noch zwei weitere Filterungen mit um 180° gedrehten Iterationsrichtungen notwendig. Zwischen den 4 Filterungen wurde jeweils das gesamte Signalfeld gespeichert.

6.2 Die Programmierung auf dem Minicomputer

Die Programmierung des Filters wurde auf einem HP 2100 Rechner vorgenommen [50,51,52]. Dieser Rechner hat eine Wortlänge von 16 Bit. Als Signalfeldgröße wurden in Anlehnung an die Auflösung eines Fernsehbildes 512×512 Bildpunkte gewählt. Dieses Feld ist so groß, daß es noch auf dem zum Rechner gehörenden Plattenlaufwerk gespeichert werden kann. Als Alternative wurde auch ein digitales 1-Zoll-Bandgerät mit 9 Spuren verwendet, auf dem auch größere Datenfelder gespeichert werden können. Der Rechner erlaubt die Programmierung in einer höheren Programmiersprache (Fortran) und in Maschinensprache. Der Rechner arbeitet mit einem Kernspeicher als Hauptspeicher.

Zusätzlich stehen 2 Mikroprogrammierspeicher zur Verfügung. Mit diesen können kürzere Programmroutinen besonders schnell abgearbeitet werden. Die erhöhte Geschwindigkeit gegenüber der Programmierung in Maschinensprache wird durch die alleinige Verwendung des Steuerwerks und des Rechenwerks mit den zugehörigen Registern erreicht. Das Maschinenprogramm arbeitet dagegen jeweils mit einem Zugriff auf den Kernspeicher und ist an dessen Geschwindigkeit gebunden. Die Zykluszeit der Mikroprogrammierung beträgt nur ein Zehntel der Zykluszeit von Maschinenprogrammen.

Die Programmierung der Gleichungen der Adaptoren des WDF wurde mit einem Mikroprogramm ausgeführt. Dabei wurden die in [53] angegebenen Erfahrungen für die Programmierung von eindimensionalen WDF verwendet. Die Umordnung der Feldgrößen und das Nullsetzen der Speicher am Rand des Feldes wurde durch zwei weitere Mikroprogramme vorgenommen. Die Umordnung der Feldgrößen ist für das Durchlaufen der zwei Iterationsrichtungen innerhalb einer Zeile notwendig.

Der Datentransport der durch das Mikroprogramm bestimmten Größen zum Kernspeicher wird durch einen Programmteil in Maschinensprache vorgenommen. Dieser Programmteil ist auch für die Speicherung der Zustandsgrößen im Kernspeicher verantwortlich.

Die Abspeicherung der Daten des Eingangs- und Ausgangsfeldes auf die Platte wird durch ein Programm in Fortran gesteuert. Dabei erfolgt ein direkter Zugriff auf die einzelnen Spuren des Plattenlaufwerks. Der gewöhnliche Zugriff über ein Dateiverzeichnis würde zu einem dauernden Wechsel der vom Schreiblesekopf angesteuerten Spuren führen und damit die Verarbeitungszeit wesentlich erhöhen.

Bei der Benutzung des Bandgerätes erfolgt die Steuerung des Datentransports ebenfalls über ein Fortran-Programm. Jede Zeile des Eingangs- und Ausgangssignals wird dabei zu einem Datenblock zusammengefaßt auf das Magnetband gespeichert. Mit Hilfe des blockweisen Rückspulens ist die Verarbeitung mit geänderter Iterationsrichtung bezüglich der Spalten möglich.

Die Darstellung der Signale erfolgt durch 16-Bit Ganzzahlen. Die Additionen werden in Zweierkomplementarithmetik ausgeführt. Die Ausführung der Multiplikation erfolgt durch ein vom Hersteller geliefertes Mikroprogramm, daß im Rechner fest programmiert ist. Die Koeffizienten werden ebenfalls als 16 Bit Ganzzahlen dargestellt. Das Ergebnis einer Multiplikation wird in zwei 16 Bit Registern gespeichert. Durch Verschiebeoperationen läßt es sich wieder auf 16 Bit beschneiden.

Wie im letzten Kapitel erwähnt kann bei multipliziererfreier Realisierung der Drehung und Verwendung eines günstigen Koeffizientensatzes auf ein Multiplikationsprogramm verzichtet werden. Auf diese Weise könnte die Rechenzeit des Mikroprogrammes um mehr als die Hälfte verkürzt werden. Außerdem stände dann der vom Multiplikationsprogramm belegte Mikroprogrammspeicher noch zur Verfügung, so daß auch Filter höherer Ordnung realisiert werden könnten.

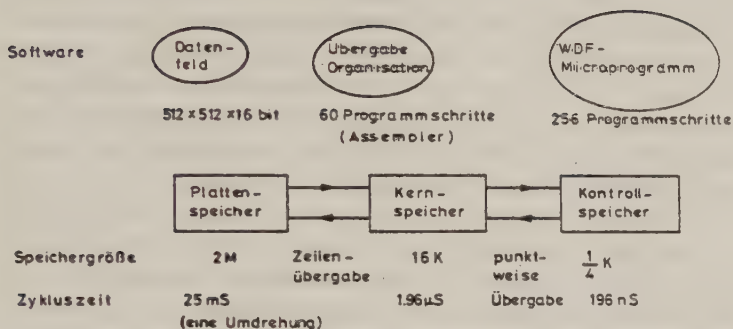


Bild 6.6 Die Programm- und Datenstruktur des Filters auf dem Minicomputer HP 2100

6.3 Unterdrückung von parasitären Schwingungen

Die Unterdrückung von parasitären Schwingungen kann im 2-D-WDF durch Einhaltung der Bedingung (3.1.4) erfolgen. Werden die Schneideoperationen teilweise oder vollständig innerhalb des Adaptors ausgeführt, so muß gedanklich ein idealer Adaptor mit Schneideoperationen an den Ausgängen betrachtet werden. Diese gedanklichen Schneideoperationen müssen dann so ausgeführt werden, daß sich die gleichen Werte wie im realisierten Adaptor ergeben. Das WDF ist dann pseudopassiv, wenn diese gedanklichen Schneideoperationen (3.4.1) erfüllen. Wird im weiteren von Einhaltung der Bedingung (3.1.4) geredet, so soll darunter auch diese Modellvorstellung fallen.

Die Bedingung (3.1.4) läßt sich besonders einfach einhalten, wenn die Dreitoradaptoren aus Kapitel 2.1 mit einem reflexionsfreien Tor verwendet werden und die Zahlen durch Gannzzahlen (Zweierkomplement) dargestellt werden. Die Bedingung (3.1.4) ist sowohl für Abweichungen einzuhalten, die sich aus den nach den Multiplikationen notwendigen Abschneiden der niedrigwertigen Stellen ergeben, als auch für Abweichungen nach Überläufen.

In [28,31] sind Regeln angegeben, die die zur Unterdrückung von parasitären Schwingungen notwendige Pseudopassivität garantieren. Diese Regeln lassen sich direkt bei einer Hardwarerealisierung verwenden. Bei der Programmierung von Digitalfiltern ergeben sich gewisse Abweichungen gegenüber einer Hardwarerealisierung. Zum einen werden alle Operationen im Rechner mit einer festgelegten Stellenzahl ausgeführt. Abweichende Stellenzahlen lassen sich durch mehrmaliges Ausführen der Operationen und durch Nichtbenutzen von bestimmten Stellen berücksichtigen. Zum zweiten erfolgt die Verarbeitung aller Operationen in einem Programm nacheinander. Daher ist für jede Verzweigung im Flußdiagramm eine Speicheroperation notwendig, während eine Verzweigung bei der Hardwarerealisierung keinen Aufwand erfordert. Die Zerlegung der Gleichungen der Adaptoren wird, um eine möglichst geringe Anzahl von Operationen durchführen zu müssen, daher nicht unbedingt genauso wie bei der Hardwarerealisierung erfolgen. Die Regeln zur Erzielung Pseudopassivität sind im folgenden etwas für die Anwendung bei der Programmierung modifiziert. Es ergeben sich jedoch die gleichen Ergebnisse wie bei den ursprünglichen Regeln.

Die durch das Abschneiden der niedrigwertigen Stellen erzeugten Effekte lassen sich getrennt von den Überläufen behandeln, wenn das Eingangssignal so gewählt wird, daß keine Überläufe auftreten. Mehr ideell kann dazu auch von einer nach oben hin unbeschränkten Wortlänge ausgegangen

werden. Die Bedingung (3.1.4) läßt sich dann auf folgende Weise einhalten:

Die Gleichungen der Dreitoradaptoren werden so in Teilgleichungen zerlegt, daß nur in einer Gleichung eine Multiplikation, sonst aber nur Additionen und Vorzeichenänderungen ausgeführt werden müssen. Dabei ist darauf zu achten, daß nicht durch Additionen ebenfalls eine Multiplikation ausgeführt wird. Multiplikationen mit Potenzen von 2, die durch Stellenverschieben realisiert werden können, sind hier auch als Multiplikationen zu betrachten. Die Beiträge des aus der Multiplikation entstandenen Signals zu den reflektierten Wellen müssen das gleiche Vorzeichen wie das aus der Multiplikation entstandene Signal haben. Ist dies nicht der Fall, so können die Rundungsoperationen am invertierten Signal ausgeführt werden. Die einzige Multiplikation wird mit voller Wortlänge ausgeführt. Danach können die niedrigwertigeren Stellen (Stellen deren Wert kleiner 1 ist) unberücksichtigt bleiben. Der durch das Abschneiden der niedrigwertigen Stellen gemachte Fehler ergibt aufgrund der Zweierkomplementdarstellung niemals ein zu großes Signal. Die Notwendigkeit der Berechnung aller Stellen ergibt sich aus der Möglichkeit eines Übertrages in den niedrigwertigen Stellen, der auch die höherwertigen Stellen beeinflusst. Da die Additionen präzise ohne Erhöhung der niedrigwertigen Stellen ausgeführt werden können, sind die Fehler der so berechneten auslaufenden Wellen nur durch den nach der Multiplikation entstandenen Rundungsfehler gegeben. Dabei hat der Fehler wegen der oben gemachten Vorzeichenregel sein Vorzeichen beibehalten. Die so berechneten Zahlen für die auslaufenden Wellen sind also in keinem Fall zu groß. Ist die auslaufende Welle positiv so ist dadurch der Betrag der Zahl gesunken. Damit ist (3.1.4) erfüllt. Ist dagegen die auslaufende Welle negativ, so ist ihr Betrag gestiegen. Durch Addieren einer 1 wird auch dieser Betrag wieder kleiner als der ideale Betrag.

Im Mikroprogramm wurden die auslaufenden Wellen auf ihr Vorzeichen hin untersucht. War dieses negativ, so erfolgte die Addition einer 1. Diese Addition wurde vor dem Abspeichern der Signale vorgenommen. Wegen der Möglichkeit von Überträgen muß die Addition mit der vollen Wortlänge durchgeführt werden. Bei Hardwarerealisierung können diese Addition teilweise von den vorhandenen Addierern vorgenommen werden, wenn deren Übertragseingang zum Addieren benutzt wird. Eine entsprechende Lösung wurde im Mikroprogramm nicht verwirklicht.

Bei der Realisierung der Pseudopassivität entsprechend (3.1.4) bezüglich der Überläufe sollen wieder nur die in Kapitel 2.1 angegebenen Adaptoren mit einem reflexionsfreien Tor betrachtet werden. Wieder werden die Gleichungen in die gleichen Teilgleichungen zerlegt, die nur eine Multiplikation erforderten. Aus der Ausführung der Additionen im Zweierkomplement ergibt sich sofort folgendes:

① Im Falle eines Überlaufs wird der Betrag immer kleiner als der Betrag im idealen Fall (Sägezahnkennlinie).

② Liegt das Ergebnis mehrerer Additionen im idealen Fall im darstellbaren Zahlenbereich, so läßt sich das Ergebnis immer richtig mit den Additionen bestimmen. Dabei spielt es keine Rolle, ob Überläufe bei den einzelnen Additionen auftreten.

(Das Ergebnis ② ist unabhängig von dem Vorgehen bezüglich der niedrigwertigen Stellen. Für ① ist nur in einem einzigen Sonderfall die erwähnte Addition einer 1 notwendig.) Für die Additionen werden daher keine zusätzlichen Maßnahmen benötigt, um die Pseudopassivität zu gewährleisten

Die Multiplikation wird, um im Falle von Überläufen immer (3.1.4) zu gewährleisten, folgendermaßen ausgeführt:

Das Signal, daß mit dem Koeffizient multipliziert wird, entsteht aus der Addition verschiedener einlaufender Wellen. Bei diesen Additionen wird die Wortlänge so erhöht, daß es bei diesen Additionen zu keinem Überlauf kommen kann. In den betrachteten Dreitoradaptoren sind dies zwei oder drei Additionen, so daß bei Hardwarerealisierung mit 1 oder 2 zusätzlichen Stellen gearbeitet werden kann. Die Multiplikation wird danach mit der erhöhten Wortlänge ausgeführt. Die über den darstellbaren Zahlenbereich auftretenden Stellen bleiben danach unberücksichtigt. Dies entspricht dann wieder der Bildung der Sägezahnkennlinie der Zweierkomplementdarstellung entsprechend $\Diamond$; die - unabhängig davon, wieviele Additionen noch folgen - im Falle eines Überlaufs zu betragsmäßig kleineren Werten für die auslaufenden Wellen führt. Durch die Erhöhung der Wortlänge ergibt sich außerdem eine größere Aussteuerbarkeit des WDF. (Die Aussteuerbarkeit erhöht sich im günstigsten Fall um 200%.)

Im Mikroprogramm wurde die Erhöhung der Signalwortlänge durch Abspeicherung des Übertrags und der Aufspaltung der Multiplikation mit verlängerter Wortlänge in zwei Multiplikationen mit 16 Bit Wortlänge verwirklicht. Die entstandenen 2 Werte werden nach den Multiplikationen so verknüpft, daß der Signalwert im darstellbaren Zahlenbereich entsteht.

Der im Filter verwendete Zweitoradaptor benötigt nur einen Multiplizierer, wie dies auch bei dem Dreitoradaptor mit einem reflexionsfreien Tor der Fall war. Die Pseudopassivität läßt sich daher für den Zweitoradaptor ähnlich wie oben beschrieben verwirklichen.

6.4 Praktische Ergebnisse

Die praktischen Ergebnisse mit der Unterdrückung von parasitären Schwingungen in 2-D-WDF sind nicht aufgeführt, um den Beweis zu führen, sondern sollen die Notwendigkeit solcher Maßnahmen für 2-D-Filter mit Ganzzahlendarstellung zeigen. Diese Ganzzahlendarstellung erlaubt eine schnellere Verarbeitung des Signals, als dies mit Gleitkommadarstellung möglich ist. Zum Vergleich wurden weitere Filter programmiert, bei denen die Maßnahmen zur Unterdrückung von parasitären Schwingungen nicht verwirklicht worden sind. Auch bei den gewählten Beispielen lassen sich granulare Schwingungen und Überlaufeffekte wieder gut trennen.

Das pseudopassive 2-D-WDF zeigt in Bereichen, in denen das Eingangssignal Null ist, keine granularen Schwingungen. Daher ist in diesen Bereichen das Ausgangssignal bis auf Abklingvorgänge ebenfalls Null. Diese Eigenschaft blieb auch erhalten, wenn zur Vereinfachung der Berechnung bei den Verbindungen zwischen den einzelnen Adaptoren auf die Addition der 1 bei negativen Zahlen verzichtet wurde. Wurde die Addition der 1 jedoch überhaupt nicht vorgenommen, so traten immer granulare Schwingungen auf (Bild 6.7). Dies Ergebnis war überraschend, da im eindimensionalen Fall nicht bei jeder zufälligen Ansteuerung granulare Schwingungen auftraten.

Bei dem Beispiel Bild 6.7 wurde ein Eingangssignal verwendet, das nur in einem schmalen Streifen den Wert 1 hat, sonst aber überall den Wert Null hat. Das Ausgangssignal wurde für die Zeichnung so stark vergrößert, daß granulare Schwingungen erkannt werden können. Dabei ließ sich das Ausgangssignal in dem Bereich, in dem es nahe 1 ist, auf den Zeichnungen nicht mehr darstellen. Es ist daher

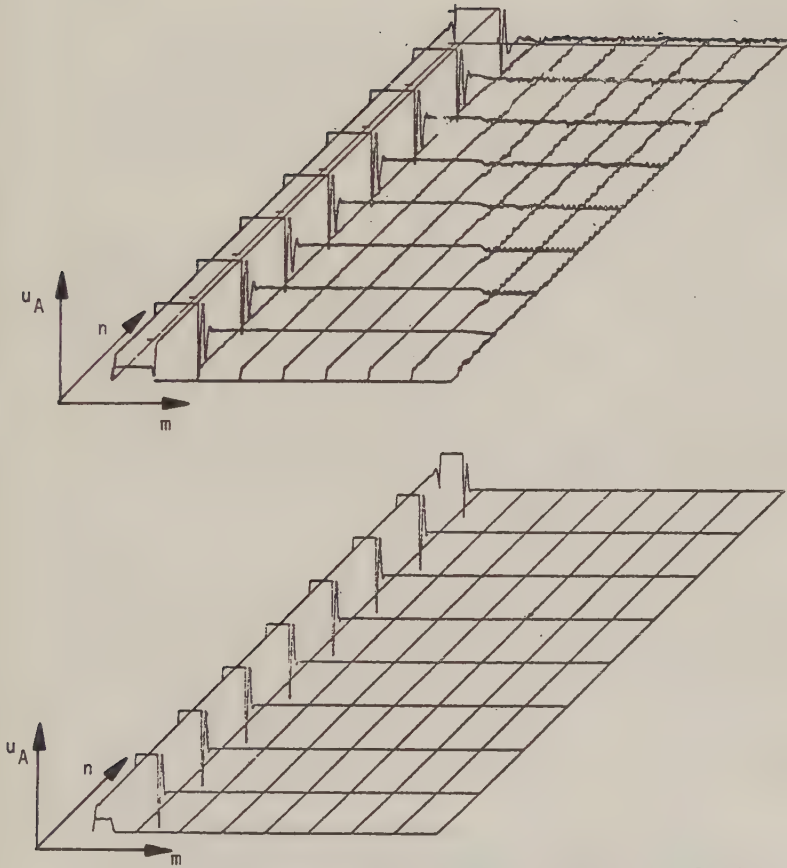


Bild 6.7 Das Ausgangsfeld für ein Eingangssignal, das nur im linken Streifen ungleich Null ist. Wegen der Vergrößerung ist (nur im Bild) das Ausgangssignal im linken Streifen abgeschnitten.
oben: granulare Schwingungen bei normaler Realisierung
unten: keine granularen Schwingungen beim pseudopassiven WDF

in den Zeichnungen auf den maximal zeichenbaren Wert beschränkt worden.

Bei den betrachteten 2-D-Signalen ist die Anzahl der Abtastwerte zwischen den Rändern gering. Bei der nicht pseudopassiven Realisierung erzeugen die Einschwingvorgänge einzelne Schwingungen granularer Art. Durch die 4-fache Filterung verbreiteten sich diese granularen Schwingungen fast auf das ganze Feld.

Bei pseudopassiven 2-D-WDF klingt das Ausgangssignal beim Eingangssignal Null auf den Wert Null ab, selbst wenn sich das Filter in einem Überlaufzustand befand. Es interessiert aber auch die Frage, was passiert, wenn das Eingangssignal nach einem Überlauf nicht zu Null gemacht wird. Gelangt das Filter nach einem Überlauf wieder in den normalen Betrieb, wenn das Eingangssignal wieder auf den erlaubten Bereich zurückkommt, so wird das Filter als antwortstabil bezeichnet [29,11].

Wurde die pseudopassive Version des Filters verwendet, so führte kurzzeitiger Überlauf des Signals zu Fehlern, die sich aber nicht auf das ganze Bildfeld erstreckten. Der Bereich der Abweichung war von der Größe der Übersteuerung abhängig (Bild 6.8). Wurde nach der Übersteuerung das Eingangssignal wieder auf Null gesetzt, so ging auch das Ausgangssignal auf diesen Wert.

Bei dem Filter ohne die angegebenen Maßnahmen führte jeder Überlauf zu einer vollständigen Zerstörung des Bildinhalts. Dieser Effekt trat auch dann auf, wenn die Eingangsgröße nur um eine Quantisierungsstufe (in Beispiel Bild 6.9 um 0.3%) erhöht wurde. Bei 1-D-WDF-Filtern, mit denen wesentlich mehr als 512 Abtastwerte hintereinander verarbeitet werden, klingen Überlaufschwingungen

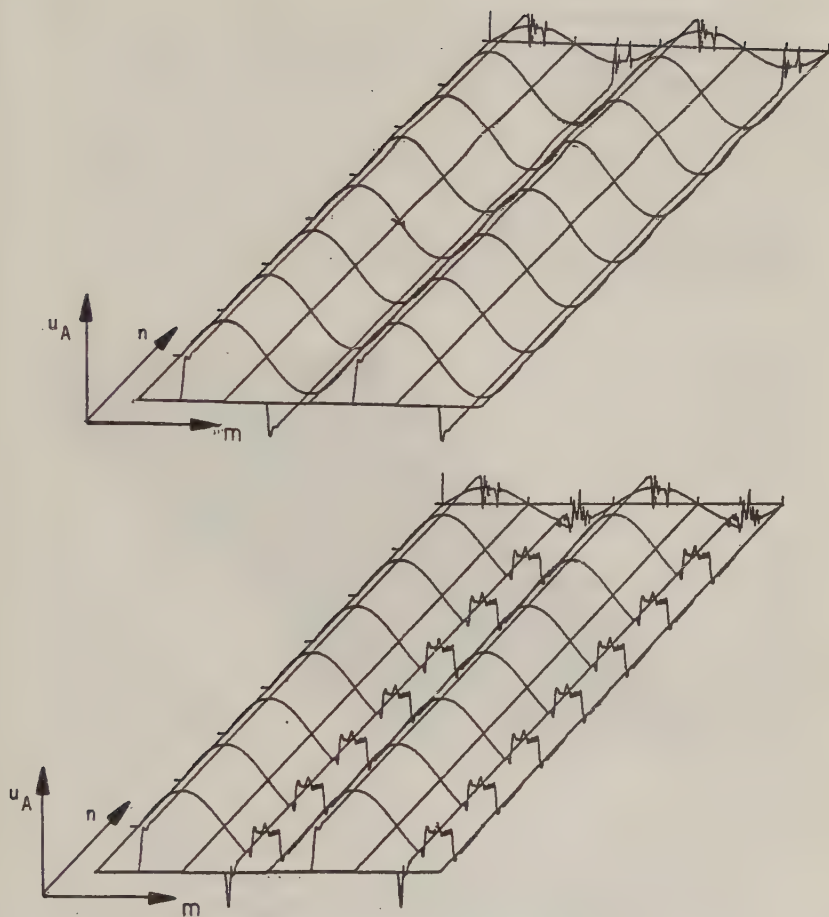


Bild 6.8 Überläufe in 2-D-Wellendigitalfiltern bei sinusförmigem Eingangssignal

oben: Der Überlauf tritt nur in den ersten Reihen auf.
unten: Wird das Eingangssignal noch größer gewählt,
so sind die Überlauseffekte in ganzen Streifen.

möglicherweise durch den Einfluß der folgenden Signale (z.B. Signalpausen) ab. Dieses zufällige Abklingen konnte bei dem nicht pseudopassiven 2-D-WDF nicht beobachtet werden.

Die Austeuerbarkeit des pseudopassiven Filters war im betrachteten Beispiel -wegen der Erhöhung der Wortlänge vor der Multiplikation- um 80% höher als beim Filter ohne Unterdrückung der Überlaufschwingungen.

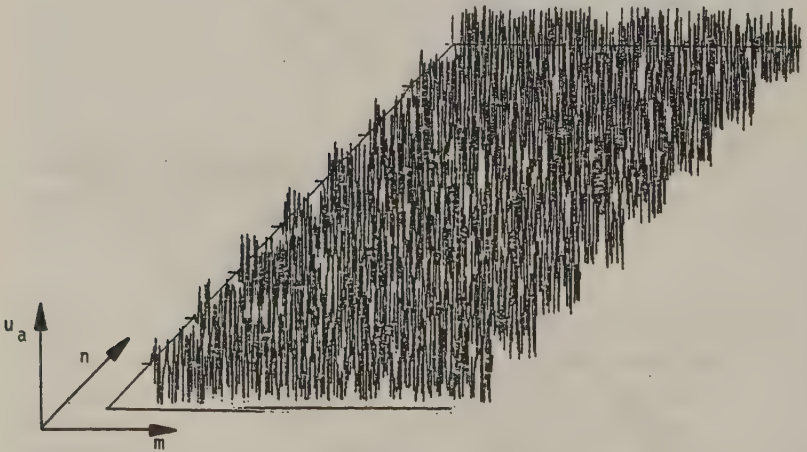


Bild 6.9 Ausgangssignal, dessen Bildinhalt durch einen Überlauf vollständig zerstört wurde. Das Ausgangsfeld entstand durch eine Filterung mit einem nicht pseudopassiven WDF (ohne Erhöhung der Wortlänge vor der Multiplikation) bei sinusförmigem Eingangssignal mit 0.3% Übersteuerung (1 Bit).

Zusammenfassung

Zur Bildverarbeitung werden 2-dimensionale Filter benötigt, die eine kreissymmetrische Dämpfung in der physikalischen Frequenzebene haben. Außerdem sollen diese Filter phasenkompensiert sein. Von besonderem Interesse sind kreissymmetrische Tiefpassfilter.

Die Theorie der Wellendigitalfilter läßt sich auf den mehrdimensionalen Fall erweitern. Dabei bleiben die guten Eigenschaften der Wellendigitalfilter erhalten. Das Referenzfilter ist ein mehrdimensionales LC-Filter. Der Hauptunterschied gegenüber dem eindimensionalen Fall ist bei der Realisierung in der zweidimensionalen Indizierung der Variablen zu finden. Für ein einfaches Beispiel wird ein Programm zur Realisierung eines 2-D-Wellendigitalfilters angegeben.

Mehrdimensionale Wellendigitalfilter lassen sich immer so realisieren, daß sie frei von parasitären Schwingungen sind. Dazu sind nur einfache Operationen notwendig, die im Falle eines Überlaufs und bei den notwendigen Rundungen vorgenommen werden müssen. Das Programmbeispiel wird um diese Maßnahmen erweitert. Die Operationen lassen sich mit der verwendeten Programmiersprache aber nicht so wirkungsvoll umsetzen, wie dies für eine Hardwarerealisierung möglich ist.

Die bekannten Verfahren zur Approximation eines gewünschten Dämpfungsverlaufs lassen sich nicht auf den zweidimensionalen Fall erweitern. Zur Realisierung des kreissymmetrischen Verhaltens der Filter wird deshalb die Kaskadierung von gedrehten Einzelfiltern verwendet. Dabei werden zur Drehung der eindimensionalen Filter zwei verschiedene Frequenztransformationen verwendet. Die

Transformation im z -Bereich ist günstig, weil sie beim Filtern keine zusätzlichen Rechenoperationen benötigt. Für die Transformation im ψ -Bereich werden Sonderfälle angegeben, bei denen eine Realisierung der Drehung ohne mehrstellige Multiplikation möglich ist.

Für diese als multipliziererfreie Drehungen benannten Fälle werden alle möglichen Vieleckfilter mit bis zu 16 Ecken angegeben. Diese Filter werden mit entsprechenden Filtern der anderen Transformation verglichen. Dabei werden für die Einzelfilter ideale Tiefpässe verwendet. Als Vergleichskriterium wird die minimale Fläche des Übergangsbereiches des Vieleckfilters in einem Tiefpasstoleranzschema genommen. Auch der Speicherbedarf wird durch eine Kenngröße berücksichtigt.

Die Vieleckfilter, die mit der Drehtransformation im ψ -Bereich (A) gewonnen werden, haben einen vom Durchlaßradius abhängigen relativen minimalen Sperrradius. In weiten Bereichen sind diese Filter günstiger als die durch die Transformation im z -Bereich (B) gewonnenen Vieleckfilter. So läßt sich in einem interessanten Bereich mit der Transformation (A) mit einem Viereckfilter eine bessere Approximation der Kreissymmetrie erreichen, als dies bei der Transformation (B) mit einem 12-Eck-Filter möglich ist. Bei Verwendung der Transformation (A) werden niemals mehrere Durchlaßbereiche in der Frequenzebene gebildet, so daß ohne eine Erhöhung der Betriebsrate gearbeitet werden kann. Die Approximation der Kreissymmetrie des Verfahrens (A) läßt sich in den günstigen Bereichen nicht beliebig mit Erhöhung der Anzahl der Teilfilter steigern.

Danach werden die Möglichkeiten untersucht, mit dem Verfahren (A) noch strengere Toleranzschemen zu erfüllen, wenn die Einschränkung auf multipliziererfreie Drehungen aufgegeben wird. Es zeigt sich, daß 4-Eck- und 8-Eck-Filter multipliziererfrei gedreht optimal sind und 12-Eck-Filter multipliziererfrei gedreht zumindest in der Nähe des Optimums liegen.

Ausgehend von den Realisierungen mit den idealen Filtern, werden hinreichende Bedingungen angegeben, die bei realen Filtern eine Erfüllung eines vorgegebenen kreissymmetrischen Toleranzschemas ermöglichen. Mit diesen Bedingungen und den errechneten engsten Toleranzschemen für die verschiedenen Vielecke ist - unter Zuhilfenahme eines Verfahrens zur Approximation eindimensionaler Filter - eine Berechnung von kreissymmetrischen Tiefpässen möglich. Eine Verwendung numerischer Optimierungsverfahren ist dazu nicht notwendig, kann aber zu aufwandsgünstigeren Realisierungen führen.

In bestimmten Fällen kann durch andere Verknüpfung der Einzelfilter die Kreissymmetrie besser approximiert werden. Phasenkompensierte Filter können durch Mehrfachfilterung erhalten werden. Die für Tiefpässe erhaltenen Ergebnisse lassen sich auch für Hochpässe und Bandpässe verwenden.

Ein Viereckfilter, daß eine bessere Approximation der Kreissymmetrie ermöglicht, als ein separables Filter, wurde auf einem Minirechner realisiert. Durch die Programmierung in verschiedenen Programmebenen bis hinunter zur Mikroprogrammierung wird eine wirkungsvolle Ausführung der Filteralgorithmen erreicht. Eingangs- und Ausgangssignal werden auf einem digitalen 1-Zoll-Bandgerät gespeichert und Zeilenweise in den Rechner geholt. Für kleinere Bildfelder ist auch eine Speicherung auf der Magnetplatte möglich. Die Zahlendarstellung erfolgt durch 16-Bit-Ganzzahlen.

Durch geeignete Maßnahmen werden Überlaufschwingungen und granulare Schwingungen unterdrückt. Dies ermöglicht trotz der kurzen Wortlänge eine Verarbeitung mit ausreichender Grautonabstufung. Bei einem Vergleichsfilter ohne diese Maßnahmen, führten Überläufe von nur einem Bit zu vollständigen Zerstörung des Bildinhalts.

Literaturverzeichnis

1. H. Chang, J. K. Aggarwall, Design of two-dimensional recursive filters by interpolation, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS. 24, No. 6 June 1977
2. J. M. Costa, A. N. Venetsanopoulos, Design of circularly symmetric two-dimensional recursive filters, IEEE Transactions ASSP, Vol. ASSP-22, No. 6, December 1974
3. D. M. Goodman, A design technique for circularly symmetric low-pass filters, IEEE Transactions ASSP, Vol. ASSP-26, No. 4, August 1978
4. S. Chakrabarti, S. K. Mitra, Design of two-dimensional digital filters via spectral transformations, Proceedings of the IEEE, Vol. 65, No. 6, June 1977
5. P. Kariavaratharajan, M. N. S. Swamy, Some results on the nature of a 2-dimensional filter function possessing certain symmetrie in its magnitude response, Electronic Circuits and Systems, September 1978, Vol. 2, No. 5
6. Rabiner, Gold, Theory and application of digital signal processing, chapter 7, An introduction to the theorie of two-dimensional signal processing
7. A. Fettweis, Digital filter structures related to classical filter networks, AEÜ 25, 1971, Seite 79-89
8. A. Fettweis, Roundoff noise and attenuation sensitivity in digital filters with fixed-point arithmetic, IEEE trans. on Circuit Theory, vol. CT-20, No. 2, March 1973
9. A. Sedelmeyer, A. Fettweis, Digital filters with true ladder configuration, Int. Journal of Circuit Theory and applications, vol. 1, No. 1, pp 5-10, March 1973
10. A. Fettweis and K. Meerkötter, On adaptors for wave digital filters, IEEE Transactions, vol. ASSP-23, Dec. 1975
11. K. Meerkötter, Beiträge zur Theorie der Wellendigitalfilter, Diss., Ruhr Universität Bochum, Bochum 1977
12. P. Lennarz, Hardware-Realisation von Wellendigitalfiltern, Frequenz 32, Sept. 1978, Seite 256-261
13. W. Wegener, On the design of wave digital lattice filters with short coefficient word lengths and optimal dynamic range, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-25, No. 12, Dec. 1978
14. W. Wegener, Entwurf von Wellendigitalfiltern mit minimalem Realisierungsaufwand, Diss., Ruhr Universität Bochum, Bochum 1980

15. L. Gaszi, Hardware implementation of wave digital filters using programmable digital signal processors, ECCTD 1981, Proc., The Hague 1981
16. H. Scheuermann, Grundlagen der Wellendigitalfilter, Wissenschaftliche Berichte AEG-Telefunken, 54 (1981) 1/2, S. 11-24
17. A. Fettweis, Multidimensional wave digital filters, Proc. 1976 European Conf. on Circuit Theory and Design, vol. II, pp. 409-416, Genua, Italien, Sept. 1976
18. A. Fettweis, Multidimensional wave digital filters, in "Multidimensional system theory and Applications", N. K. Bose, IEEE Press Selected Reprint Series, New York, 1978
19. A. Fettweis, Principles of multidimensional wave digital filters, in "Digital Signal Processing", Western Periodicals, North Hollywood, Cal., USA, 1979
20. A. Fettweis, Design of recursive fan filters AEU 34(1980), S97-103
21. A. Fettweis, G. Linnenberg, A class of two-dimensional reactance functions, with applications, AEU 34(1980), Heft 7/8, S. 276-278
22. G. Linnenberg, Wave digital fan filters: Numerical and experimental results, Proc. European Signal Processing Conf., Lausanne, Sept. 80
23. K.-A. Owenier, Optimierung von Filtern, insbesondere Wellendigitalfilter mit verringerter Zahl an Multiplizierern, Diss., Ruhr Universität Bochum, Bochum, 1977
24. R. Saal, Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe, Telefunken AG, Backnang 1966
25. D. Goodman, Some difficulties with the double bilinear transformation in 2-D recursive filter design, Proc. IEEE, vol. 66, no. 7, July 1978
26. R. M. Mersereau, D. E. Dudgeon, Two-dimensional digital filtering, Proc. of the IEEE, vol. 63, no. 4, April 1975
27. S. K. Mitra, N. A. Pendergrass, Realisation of two-dimensional recursive digital filters, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, no. 3, March 1975

28. A. Fettweis, K. Meerkötter, Suppression of parasitic oscillations in wave digital filters, Proc. of the IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, S. 682-686, San Francisco, California, 22.-25. April 1974
29. T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbräuker, J. B. H. Peek, On the stability of forced response of digital filters with overflow nonlinearities, IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-22, August 1975, S. 692-696
30. A. Fettweis, Realisierungsprobleme von Digitalfiltern - Durch Wortlängenbegrenzung bedingte Effekte sowie Filterstrukturen, Zeitdiskrete Systeme und Digitalfilter, Verlag Herbert Lang & Cie., Bern, Schweiz, 1980
31. A. Fettweis, Suppression of parasitic oscillations in multidimensional wave digital filters, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-25, No. 12, Dezember 1978, S. 1060-1066
32. H. W. Schübler, Digitale Systeme zur Signalverarbeitung, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973
33. P. Lennarz, Entwurf und Aufbau eines kanonischen Wellen-digitalbandpasses, Diplomarbeit, Bochum 1975
34. S. Huang, Stability of two-dimensional recursive filters, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol AU-20, June 1972
35. D. Goodman, An alternate proof of Huang's stability theorem, IEEE Trans. ASSP, October 1976
36. D. Goodman, Some stability properties of two-dimensional shift-invariant digital filters, IEEE Trans. Circuits Syst., vol CAS-24, April 1977
37. E. Dubois, M. L. Bolstein, A circuit analog method for the design of recursive two-dimensional digital filters, IEEE Symposium Circuits and Systems, Boston, 1975
38. R. Bernstein, Beiträge zur Verarbeitung zweidimensionaler digitaler Signale, Dissertation, Erlangen, 1981
39. G. Linnenberg, Linear sampling in multi-dimensional digital signal processing, Proc. Int. Conf. Digital Signal Processing, Sept. 2-5, 1981, Florence, Italy, pp 101-109

40. W. Drews, Entwurf von 2-dimensionalen Wellendigitalfiltern mit kreissymmetrischem Toleranzschema, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Ruhr Universität Bochum, 1980
41. W. Drews, P. Lennarz, Entwurf und Realisierung von 2-D-Wellendigitalfiltern mit kreissymmetrischer Dämpfungscharakteristik, DFG-Kolloquium, Göttingen, März 1982
42. K. Höfer, Multipliziererfreie digitale Filter, DFG-Kolloquium, Göttingen, März 1982
43. E. Lüder, K. Höfer, Fast digital filters without multipliers, ISCAS 1982, Rom
44. W. Drews, 'Symm', Programm zur Berechnung des Flächenverhältnisses von Vieleckfiltern, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Ruhr Universität Bochum, 1980
45. R. Bernstein, Ein Beitrag zum Entwurf von 2-D-IIR Filtern mit kreissymmetrischem Betragsfrequenzgang, DFG-Kolloquium, Göttingen 1980
46. W. Drews, Untersuchungen am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Bochum, 1981/1982
47. W. Wegener, Untersuchungen am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Bochum 1981
48. A. Fettweis, Scattering properties of wave digital filters, Proc. Florence Seminar on Digital filtering, 1972, pp. 1-8
49. W. Wegener, Wave digital directional filters with reduced number of multipliers and adders, AEÜ 33, 1979, pp. 239-243
50. L. Hofmann, Realisierung eines 2-D-Wellendigitalfilters auf dem Digitalrechner, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Ruhr Universität Bochum, 1977
51. P. Lennarz, L. Hofmann, Computer realisation of two-dimensional wave digital filters, Proc. ECCTD 78
52. U. Meinschäfer, Realisierung eines 2-D-Filters mit Magnetbandgerät als Bildspeicher, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Ruhr Universität Bochum, 1979
53. A. Sedlmeyer, Structures for wave digital filters and their realization on a minicomputer, Diss., Bochum 1974

L E B E N S L A U F

2. 10 . 50 geboren in Düsseldorf
- 1956-1960 Besuch der katholischen Volksschule in
Düsseldorf
- 1960-1970 Besuch der Christophorusschule in
Berchtesgaden
- 1970-1975 Studium der Elektrotechnik an der
Ruhr-Universität Bochum
- 1975-1977 Wissenschaftlicher Assistent m.d.V.b.
- seit 1977 Wissenschaftlicher Assistent an der
Ruhr-Universität Bochum

